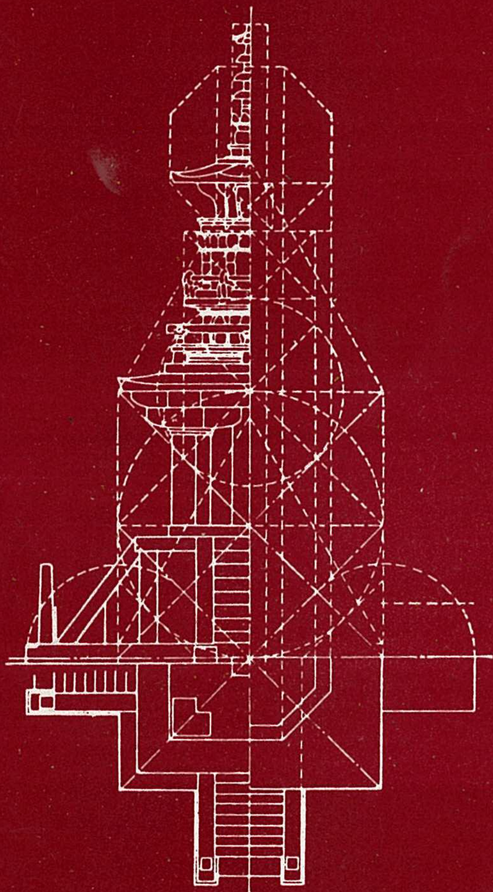
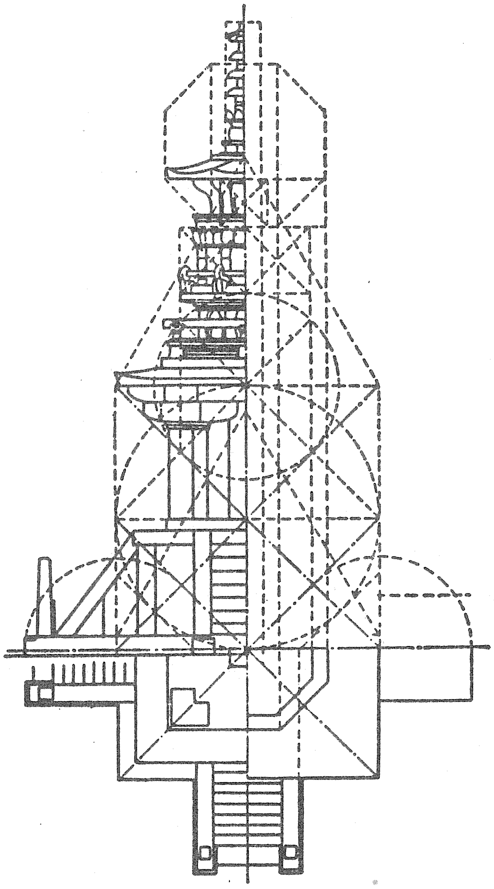
數

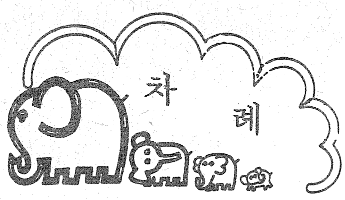


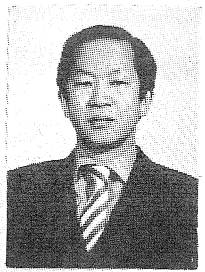
高麗大學校 數學科 學會誌

數



高麗大學校 數學科 學會誌


차
례



권 두 언

조인호 교수

지금 우리는 지구촌의 시대에 살고 있다. 卽, 世界는 모두 서로 의존하고 상부상조하며 동시에 경쟁하며 살게 되었다. 얼마전까지만 하여도 자원이 많으면 기술이나 어떤 것이 없어도 잘 살 수 있었으나, 현재 우리가 명백히 알 수 있듯이 자원의 많고 적음이 그 나라의 경제력을 결정하는 것은 아니다.

현재, 우리는 이미 정보의 시대, 선택의 시대에 살고 있다. 세계는 한 동네가 되어서 가장 우수한 상품, 가장 우수한 인재, 그리고 가장 중요한 정보를 선택하게 되어간다.

오늘날, 모든 사람들은 각자 어떤 거대한 조직체에 속하여 살고 있다. 그 조직체가 계속 存立하고 경쟁에서 이기기 위하여서는 그 구성원이 유능하고 창조적으로 맡은 바 직분을 수행하여야 한다. 얼마전만 하더라도 어떤 조직의 구성원은 봉사정신이 투철하고 성실하면 무난하였으나, 오늘날과 같이 생존경쟁이 치열한 시대에 있어서는 좋은 사회성과 더불어 창조적인 능력이 대단히 중요하게 취급되게 마련이다.

대학생은 대학에서 창조적 능력을 마음껏 발휘하고 높이도록 하여야 할 것이다. 數學科生은 數學問題 풀이로써 自身의 창조적인 능력을 향상시키게 된다. 문제를 풀 방도가 전혀 떠오르지 않는다고 해서 당황하거나 자신감을 잃지 말고 문제를 여러모로 다시 검토해 보아야 한다. 특수한 例를 들거나, 문제를 지극히 단순화시키든가 등등 아룽든 상상력을 발휘하여 문제를 여러 각도에서 검토하고 또 그 형태를 바꾸어 보도록 하자. 이렇게 하다 보면 문제의 內容全體를 환하게 하나로 인식하게 된다. 그 다음 알고 있는 여러가지 理論을 문제풀이에 適用하여 본다. 이렇게 하여 문제가 풀렸다면 自身의 分析力과 풍부한 상상력, 그리고 정확한 인식력에 자부심을 갖게되며, 理論의 理解가 더욱 깊어지고 그 理論의 응용력이 더욱 강하여진다.

어려운 문제가 천신만고 끝에 풀렸을 때 얻는 희열은 人間에 있어서 가장 高貴한 것이라 하겠다. 이 喜熱은 지친 心身에 신선한 활력을 준다. 아마 이것은 기쁨에서 일어나는 어떤 生化學的 作用이 아닌가 한다.

제 8 회 원 고 모 집 공 고

보내는 사람: 고대 수학과 재학생

1 3 2 - □□

= 내 용 =

- □ 학 술 문 : 40 ~ 60매
- □ 한 마 당 : 40 ~ 50매
- □ 수필 · 소설 : 20 ~ 30매
- □ 시 :
- □ 일반학술문 : 30 ~ 40매

받는 사람: 편집부

고려대학교 수학과

1 3 2 - □□

학 술 문

□ Problem of Geometric Construction
□ Diophantine Equations
□ 비 선형 방정식의 해법

"Mathematics is the Queen of Science
and Arithmatic the Queen of Mathematis"
－C.F. GAUSS－

Problem of Geometric Construction

이옥연(84)

The problem of geometric construction is very classical and discussions were held even in ancient Greece on such problem as (i) trisection of an angle, (ii) duplication of a cube (i.e., constructing $2^{\frac{1}{3}}$), and (iii) guadrature of a circle (i.e., constructing the sguare root of the ratio π of the circumference of a circle to the diameter). These three have been known to be impossible since the last century.

We now discuss a criterion for the possibility of a geometric construction and then discuss cases (i) to (iii) because they are historically significant.

In our discussion, **a geometric construction** is a plane construction using rule and compass only.

A rule is used only to draw a line through two given or constructed points. A compass is used to make a circle whose center is a given or constructed point and whose radius is either not specially known or of length which is given or constructed. If no special point or length is given in a problem, we understand that two points are given whose distance is the unit length.

On the other hand, a line or a segment is given by two points, a circle is given by its center and radius, a length is given by a segment (hence by two points), and an angle is given by its vertex and edges of length one (hence by three points). Thus in any construction problem, given conditions are expressed by points, and the objects to be constructed are also expressed by points.

In expressing a point on a plane, we can use coordinates, say (a,b), where a,b are real numbers. Then we can associate a complex number $a+b\sqrt{-1}$. Thus, considering the so-called **Gauss Plane**, we express points on a plane by complex numbers.

In the following, Greek letters denote complex numbers, overbarred Greek letters denote complex conjugates.

Theorem 1. When $0, 1, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ are given points on a plane, we can obtain a point β by a geometric construction starting with them if and only if there is a seguence of fields $L_0 \subset L_1 \subset \cdots\cdots \subset L_s$ such that

(i) $L_0 = Q(\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n, \overline{\alpha_1}, \cdots\cdots, \overline{\alpha_n})$,

(ii) $[L_i : L_{i-1}] = 2$ for each $i = 1, \cdots\cdots, s$ and

(iii) $\beta \in L_s$. *(where $[\ :\ ]$ denotes the degree of extension)*

proof) The if part : The point of symmetry of a point with respect to a given line can be constructed, and therefore α_i are constructed. If two complex numbers α, α' $(\neq 0)$ are given, then (i) the product $\alpha\alpha'$ and the ratio α/α' can be constructed because addition and subtraction of arguments and the product and ratio of absolute values of α and α' can be constructed and (ii) $\alpha \pm \alpha'$ can be constructed obviously. Thus elements of L_0 are constructed. If α is given, the $\sqrt{\alpha}$ is also constructed because half of a given angle and $\sqrt{|\alpha|}$ are constructed.

Therefore if every element of L_{i-1} is constructed, then every element of L_i is constructed. This proves the if part.

The only if part : Let us consider those cases where we construct a new point from given points : (i) the intersection of two lines, (ii) one of the intersection of a line with a circle, and (iii) one of the intersections of two circles.

case(i) : Assume that r_1, r_2, r_3, r_4 are known points, $r_1 \neq r_2$, $r_3 \neq r_4$ and the new point δ is the intersection of the lines l_1 and l_2 going through r_1, r_2 and r_3, r_4, respectively. Points on l_1 are expressed as $r_1+t(r_2-r_1)$ with real numbers t. Points on l_2 are $r_3+u(r_4-r_3)$ with real numbers u. Hence δ is the solution of $r_1+t(r_2-r_1)=r_3+u(r_4-r_3)$. Since t, u are real numbers, it follows that $\overline{r_1}+t(\overline{r_2}-\overline{r_1})=\overline{r_3}+u(\overline{r_4}-\overline{r_3})$. If $(r_2-r_1)(\overline{r_4}-\overline{r_3})-(\overline{r_2}-\overline{r_1})(r_4-r_3)=0$, it follows that $(r_2-r_1)(\overline{r_4}-\overline{r_3})$ is a real number, which means that the difference of arguments of r_2-r_1 and r_4-r_3 is a multiple of $\Pi(=180°)$; hence these lines are parallel, which is not the case.

Therefore t is rationally expressed by $r_1,\cdots\cdots,r_4, \overline{r_1},\cdots\cdots,\overline{r_4}$, and hence $\delta\in Q(r_1,\cdots\cdots,r_4, \overline{r_1}\cdots\cdots,\overline{r_4})$.

case(ii) : Assume that a line l goes through α, r $(\alpha\neq r)$ and the new point δ is one of the intersections of l and a circle with center η and radius r. Then $\delta=\alpha+t(r-\alpha)$ with a real number t and $|\delta-\eta|=r$.

Therefore $(\alpha+t(r-\alpha)-\eta)(\overline{\alpha}+t(\overline{r}-\overline{\alpha})-\overline{\eta})=r^2$. Thus t is a root of a quadratic eguation. Therefore δ is an element of a quadratic extention of $Q(\alpha, r, \eta, \overline{\alpha}, \overline{r}, \overline{\eta})$.

case(iii) : Assume that the new point δ is one of the intersections of two circles with centers η_1, η_2 and radii r_1, r_2, respectively $(\eta_1\neq\eta_2)$. Then $(\delta-\eta_i)(\overline{\delta}-\overline{\eta_i})=r_i^2$ $(i=1,2)$, and $\delta\overline{\delta}-(\overline{\delta}\eta_i+\delta\overline{\eta_i})+\eta_i\overline{\eta_i}=r_i^2$. Taking the difference, we have $(\eta_2-\eta_1)\overline{\delta}+(\overline{\eta_2}-\overline{\eta_1})\delta+\eta_1\overline{\eta_1}-\eta_2\overline{\eta_2}=r_1^2-r_2^2$. Since $\eta_1\neq\eta_2$, We can solve the last eguation in $\overline{\delta}$ using δ. Then, from the first eguation, we have a quadratic eguation on δ over $Q(\eta_1, \eta_2, \overline{\eta_1}, \overline{\eta_2}, r_1^2, r_2^2)$.

In any case, the new point lies in the field of known points or in its quadratic extension.

Therefore we complete the proof of the only if part. *QED*

Corollary 2. In the above Theorem, the condition is eguivalent to the existence of a similar sequence with the additional condition that L_s is a Galois extention of L_0.

proof : Assume that a sequence as in Theorem 1 exist. Then conjugates of L_s are obtained by successive quadratic extensions of L_0: the field generated by all the conjugates of L_s is obtained similarly. The converse is obvious. QED.

Corollary 3. Under the circumstances of Theorem 1, if β is obtained by geometric construction, the degree of the minimal polynomial for β over L_0 must be a power of 2. (But not conversely : a root X^4+X+1 gives a counterexample).

As applications of these results, we discuss three problems which were stated at the beginning of this report.

As for the quadrature of a circle, impossibility is known by the fact that the ratio Π is transcendental over Q (we do not prove the transcendence property of Π).

Impossibility of the duplication of a cube follows from corollary 3, because X^3-2 is irreducible over Q.

A proof of the impossibility of trisection of an angle can be given easily by showing that there is a complex number α such that $|\alpha|=1$ and such that $x^3-\alpha$ is irreducible over $Q(\alpha)$. In connection with this, we want to discuss the possibility of geometric constructions of regular polygons. This is eguivalent to the possibility of geometric constructions of angle $2\pi/n$ when only the unit length is given.

Thus it is eguivalent to the possibility for primitive n-th roots of unity.

Note that the cyclotimic polynomial $k_n(x)$ of order n is irreducible over Q and its degree $\phi[n]$ is egual to $|U_n|$ (the cardinality of U_n, where U_n is the set of natural numbers m such that $1\leq m<n$ and such that m and n have no proper common divisor. Therefore, if n is a prime number, then $\phi(n)=n-1$.

Theorem 4. If p is a prime number, then a regular p-gon can be obtained by a geometric construction if and only if $p-1$ is a power of 2.

proof) The only if part follows from corollary 3 in view of the fact that $\phi[p] = p-1$.

Conversely, if $p-1 = 2^s$ with a natural number s, then denoting by ξ a primitive p-th root of unity, we see that $Q(\xi)$ is an abelian extention of Q whose Galois group G has order 2^s. Hense G has a composition series $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots\cdots \supset G_s = \{1\}$ with $\#\ (G_{i-1}/G_i) = 2$ for $i = 1, 2, \cdots\cdots, s$. Hence, by Theorem 1, we can obtain ξ by a geometric construction. QED

As for a general regular polygon, we assert the following:

Theorem 5. Let n be a natural number $\geqq 3$. Then we can obtain a regular n-gon by a geometric Construction if and only if $n = 2^s \times p_1 \cdots\cdots p_t$ with nonnegative rational integers and mutually distinct odd prime numbers $p_1, \cdots\cdots, p_t$ such that p_{i-1} are all powers of 2.

proof) **The if part** : Let ξ_i be a primitive p_i − th root of unity. Then, by our assumption and by Theorem 4, each ξ_i is constructed. We may assume that the argument of ξ_i is egual to $2\pi/p_i$. Then the argument of $\xi_1^{m1} \cdots\cdots \xi_t^{mt}$ is egual to $2\pi(m_1/p_1 + \cdots\cdots + m_t/p_t)$.

Since $p_1, \cdots\cdots, p_t$ are mutually distinct prime numbers, we see the existence of rational integers $m_1, \cdots\cdots, m_t$ such that the argument coincides with $2\pi/(p_1 \cdots\cdots p_t)$.

This proves that a regular $p_1 \cdots\cdots p_t$ − gon is obtained by a geometric construction. Since the bisection of an angle can be constructed, we prove the assertion for every s.

The only if part : If a regular n-gon is constructed, then for every divisor $n'(\geq 3)$ of n, a regular n'-gon is also constructed obviously. Hence for every odd prime factor p, $p-1$ must be a power of 2. Since $\phi(p^2) = p^2 - p$, a regular p^2 − gon cannot be constructed by virtue of Corollary 3 and we see that p^2 cannot divide n. QED

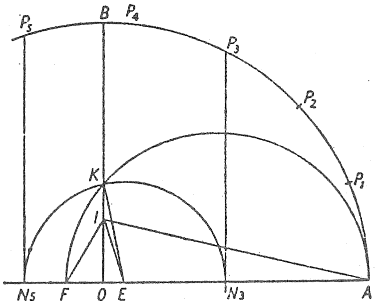
Corollary 6. If p is an odd prime number, then a p-section of a general angle (i.e., $1/p$ of a given general angle) cannot be obtained by any geometric construction.

proof) A regular p^2 – gon is not constructed, nor a p-section of $2\pi/p$. *QED*

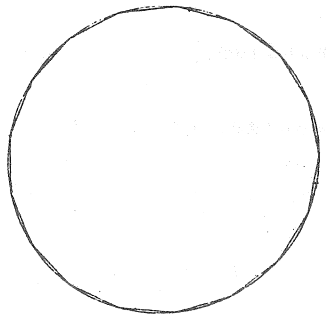
Corollary 7.. If the n-section of every angle is obtained by a geomatric construction, then n is a power of 2, and conversely.

정 17 각형의 작도법

주어진 원 O (반지름 $\overline{OA}$) 에 내정하는 정 17 각형을 작도하여보자.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

① 주어진 원의 반지름으로 서로 수직인 두 직선 OA, OB 를 작도한다.

② $\overline{OB}$ 의 길이에 $\frac{1}{4}$ 인 점 I 를 $\overline{OB}$ 위에 작도한다.

③ $\angle OIA$ 의 4 등분선과 OA 가 만나는 점을 E 라한다.

④ $\angle EIF = \frac{\pi}{4}$ 인 점 F 를 작도한다.

⑤ $\overline{AF}$ 를 지름으로 하는 원과 $\overline{OB}$ 와의 만나는 점을 K 라한다.

⑥ E 를 중심으로하고 $\overline{EK}$ 를 반지름으로하는 원과 직선 OA 와 만나는 점을 각각 N_3, N_5 라 한다.

⑦ N_3, N_5 에서 각각 직선 OA 와 수직인 직선을 그어 이들과 원이 만나는 점을 각각 P_3, P_5 라 한다.

⑧ $\angle P_5OP_5$ 의 2 등분선과 원과의 교점을 P_4 라 한다.

이때 $\overline{P_3P_4}$ 는 구하는 정 17 각형의 한 변의 길이가 된다.

(증명은 독자가 직접하여 보는것이 매우 흥미로울 것이다). □

Diophantine Equations

김용무 (84)

1. Introduction

2. Diophantine equations

(1) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n = b$ (Linear equations)

(2) $x^2 - Dy^2 = 1$ (Pell's equations)

(3) $x^2 - Dy^2 = k$ (Generalized Pell's equations)

(4) $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (Quadratic equations)

(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ (Markov's equations)

(6) $x^n + y^n = z^n$ (Fermat's equations)

(7) $mx^2 - ny^2 = \pm 1$ (Walker's equations)

(8) $a + b \cdot 10^k = (a+b)^2$ (Hashway − Lossers equations)

(9) $2^a - 2^b \mid n^a - n^b$ for all n (Selfridge − Sun Qi − Zhang Mingzhi's equations)

3. Summary

4. References

1. Introduction

H. Minkowski once said, "Integral numbers are the fountainhead of all mathematics." and K.F. Gauss said, "Mathematics is the queen of the sciences and number theory the queen of Mathematics." I think that Diophantine equations and properties of prime numbers are the core of number theory.

In this paper, I take up the study of Diophantine equations (include the special cases). The name honors the mathematician Diophantus, who initiated the study of such equations. Practically nothing is known of Diophantus as an individual, save that he lived in Alexandria sometime around 250 A.D. The only positive evidence as to the date of his activity is that the Bishop Laodicea, who began his episcopate in 270, dedicated a book on Egyptian computation to his friend Diophantus. While Diophantus' work were written in Greek and he displayed the Greek genius for theoretical abstraction, he was most likely a Hellenized Babyloninan. About all we know of Diophantus' personal life is contained in the following summary of an epitaph given in the Greek Anthology ; His boyhood lasted $\frac{1}{6}$ of his life, his beard grew after $\frac{1}{2}$ more, after $\frac{1}{7}$ more he married, and his son was born 5 years later. The son died 4 years before his father at $\frac{1}{2}$ his father's (final) age. From these data we have that he died 84 years, but in what year or even in what century is not certain. [1] The great work upon which the reputation of Diophantus rests is his Arithmetica, which may be described as the earliest treatize on algebra. Only six Books out of the original thirteen have been preserved. For a mathematician of the sixteenth century, Diophantus was no easy text to decipher. Xylander was the first to attempt a complete translation and published the fruit of his efforts in Basel in 1575.[2]

2. Diophantine Equations

(1) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n = b$ (Linear equations)

We consider the linear Drophantine equation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n = b$.

At first, we consider the case $n = 2$. We have the following theorem.

THEOREM 1 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, $a_1 \neq 0 \neq a_2$ ……………… ①

Let $c = (a_1, a_2)$. *Then*

(ㄱ) *If* $c \nmid b$, ① *has no solution.*

(ㄴ) *If* $c \mid b$, ① *has infinitely many solutions such that.*

$$(x_1, x_2) = \left(r_1 + \frac{a_2}{c}t,\quad r_2 - \frac{a_1}{c}t\right)$$

for varing integer t *and* (r_1, r_2) *is any particular solution of* ①.

proof : (ㄱ) Obvious.

(ㄴ) If $c \mid b$, then there exist s_1, s_2 such that

$a_1s_1 + a_2s_2 = c$.

Then $(r_1, r_2) = \left(\frac{b}{c}s_1, \frac{b}{c}s_2\right)$ is a solution of ①. Let $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ be any solution of ①. Then $a_1y_1 + a_2y_2 = b = a_1r_1 + a_2r_2$

i.e., $\frac{a_1}{c}(y_1 - r_1) = -\frac{a_2}{c}(y_2 - r_2)$ ……………………………… (*)

Since $\left(\frac{a_1}{c}, \frac{a_2}{c}\right) = 1$, $\frac{a_1}{c} \mid (y_2 - r_2)$ and $\frac{a_2}{c} \mid (y_1 - r_1)$,

for suitable integers t, u.

$$y_1 - r_1 = \left(\frac{a_2}{c}\right)t, \quad y_2 - r_2 = \left(\frac{a_1}{c}\right)u$$

In this case $t = -u$ by (*). Thus $\left(r_1 + \frac{a_2}{c}t,\ r_2 - \frac{a_1}{c}t\right)$

is a solution of ①. Clearly for any integer t,

$\left(r_1 + \frac{a_2}{c} t, \ r_2 - \frac{a_1}{c} t \right)$ is solution of ①.

So our proof is complete.

(**EXAMPLE**) Solve the linear equation $16x_1 + 26x_2 = 318$.

Now we consider the $n-$ indeterminant linear equation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n = b$$
$$(n > 2, \ a_i \neq 0 \ \ for \ \ i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

If $(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) \nmid b$, then our equation ② has no solution. So suppose $(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) \mid b$. Put $\beta = \frac{a_n}{(a_{n-1}, a_n)}$ and $\delta = \frac{-a_{n-1}}{(a_{n-1}, a_n)}$ then $(\beta, \delta) = 1$. And there exist integers α, γ such that $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. And put $x_{n-1} = \alpha u + \beta v$ and $x_n = \gamma u + \delta v$ then we have $a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = (a_{n-1}\alpha + a_n\gamma) u$ i.e.,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_{n-2}x_{n-2} + (a_{n-1}\alpha + a_n\gamma) u = b \cdots\cdots\cdots \text{②}'$$

Since $u = \delta x_{n-1} - \beta x_n$, $v = -\gamma x_{n-1} + \alpha x_n$ are integers if and only if u is integer. And $a_{n-1}\alpha + a_n\gamma = -(a_{n-1}, a_n)\alpha\delta + (a_{n-1}, a_n)\beta\gamma = -(a_{n-1}, a_n)$, $(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n))$. So from ② we get the $(n-1)$ - indeterminat linear equation ②′ Continuosly, we can get the linear equation which is formed ①.

(**EXAMPLE**) Solve the linear equation $21x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 1$

solution : Since $(21, 14, 12) = 1$, it has infinitely many integer solutions. Now $\beta = 6$, $\delta = -7$, thus $\alpha = -1$, $\gamma = 1$. So $a_{n-1}\alpha + a_n\gamma = -2$. So we have $21x_1 - 2u = 1$, then $(x, u) = (1-2t, 10-21t)$. And since $u = \delta x_2 - \beta x_3$. So $(x_2, x_3) = (-10 +$

$2t-6s,\ 10-21t+7s$). That is, our solution is $(x_1, x_2, x_3) = (1-2t,\ -10+2t-6s,\ 10-21t+7s)$ where $(s, t) \in Z^2$

(2) $x^2 - Dy^2 = 1$ (Pell's equations) ································ ③

In February, 1657, Fermat issued his Second Challenge, dealing directly with the theoretical point at issue ; find a number y which will make $Dy^2 + 1$ a perfect square, where D is a positive integer which is not square. Frénicle proceeded to calculate the smallest positive solutions of $x^2 - Dy^2 = 1$ for all permissible value of D up to 150, and suggested that Wallis extend the table to 200 or at least solve $x^2 - 151y^2 = 1$ and $x^2 - 313y^2 = 1$. And we find a whole section devoted to equations $Dy^2 + m = x^2$, where D is positive integer (tacitly assumed not to be a square), m is a positive or negative integer in the work of Brahmagupta, dating back to the seventh century. [2]

As a result of a mistaken reference, the central point of contention, the equation $x^2 - Dy^2 = 1$, has gone into the literature with the title " Pell's equation ". The erroneous attribution of its solution to the English mathematician John Pell, who had little to do with the problem, was an oversight on Euler's part. On a cursory reading of Wallis' " *Opera Mathematica* (1693) ", in which Brouncker's method of solving the equation is set forth as well as information as to Pell's work on Diohantine analysis, Euler must have confused their contributions. By all rights we should call $x^2 - Dy^2 = 1$ " Fermat's equation " for he was the first to deal with it systematically. While the historical error has long been recognized, Pell's name is the one that is indelibly attached to the equation.

At first, we consider the properties of continued fraction.

DEFINITION By a finite continued fraction is meant a fraction of the form

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

Where a_i $(0\le i\le n)$ are real numbers. all of except possibly a_0 are positive. The numbers a_i are the partial denominators of this fraction. Such a fraction is called simple if all of the a_i are integers. It is convenient to denote the above expression by $[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n]$. In this case we call $\alpha_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \cdots\cdots, a_k]$ $(0\le k\le n)$ the $k-$th convergent of $[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_k]$. Then the convergents satisfy the following :

$$\begin{array}{llll} p_0=a_0, & p_1=a_1a_0+1, & p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2} & \\ q_0=1,, & q_1=a_1 \quad , & q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2} & (2\le k\le n) \end{array}$$

So $\alpha_k=\dfrac{p_k}{q_k}=\dfrac{a_kp_{k-1}+p_{k-2}}{a_kq_{k-1}+q_{k-2}}.$

And $p_1q_0-q_1p_0=(a_1a_0+1)\cdot 1-a_1a_0=(-1)^{1-1}$

We assume that the formular $p_kq_{k-1}-q_kp_{k-1}=(-1)^{k-1}$ is true for $1\le k<n$, then

$$\begin{aligned} p_{k+1}q_k-q_{k+1}p_k &= (a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-(a_{k+1}q_k+q_{k-2})p_k \\ &= -(p_kq_{k-1}-q_kp_{k-1})=-(-1)^{m-1}=(-1)^m \end{aligned}$$

Thus $p_kq_{k-1}-q_kp_{k-1}=(-1)^{k-1}$, $1\le k\le n$.

It follows that $(p_k, q_k)=1$.

LEMMA 1 (ㄱ) $q_{k-1}\le q_k$ $(1\le k\le n)$

(ㄴ) $q_{k-1}+1\le q_k$ $(1<k)$

proof : $q_0 = 1 \leq a_1 = q_1$. Assume that it is true for $k = m < n$.

Then $q_{m+1} = a_{m+1} q_m + q_{m-1} > a_{m+1} q_m \geq 1 \cdot q_m = q_m$

Thus $q_{k-1} \leq q_k$ for $1 \leq k \leq n$. Furthermore $q_{k-1} + 1 \leq q_k$ for $1 < k \leq n$.

LEMMA 2 (ㄱ) $\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_4 < \cdots\cdots$

(ㄴ) $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_5 > \cdots\cdots$

(ㄷ) Every convergent with an odd subscript is greater than every convergent with an even subscript.

proof : $\alpha_{k+2} - \alpha_k = (\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) + (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$

$$= \left(\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right)$$

$$= \frac{(-1)^k (q_{k+2} - q_k)}{q_k\, q_{k+1}\, q_{k+2}}$$

From above lemma, $q_k < q_{k+2}$. Thus it is evident that $\alpha_{k+2} - \alpha_k$ has the some algebraic sign as does $(-1)^k$.

So (ㄱ),(ㄴ) hold. And $\alpha_k - \alpha_{k-1} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$. So (ㄷ) holds.

And we ask ; Is every rational number is representable as a finite continued fraction ? Our answer is " yes ". (Why ?)

Let $\{a_i\}$ be an infinite sequence of integers, all positive except perhaps for a_0, then the expression

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n]$$

exists and denoted more simply by $[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n, \ldots]$, is called an infinite simple continued fraction.

DEFINITION A continued fraction is said to be periodic if there exist k and L such that $a_{l+k} = a_l$ for $l \geq L$.

We call k the period or length and we write

$$[a_0, \cdots\cdots, a_{L-1}, \dot{a}_L, \cdots\cdots, \dot{a}_{L+k-1}].$$

DEFINITION We call $\alpha'_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots\cdots]$ the $(n+1)$-th complete quotient of $[a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots]$

Then, we have

$$\alpha = \alpha'_0, \qquad \alpha = \frac{\alpha'_1 a_0 + 1}{\alpha'_1}, \qquad \alpha = \frac{\alpha'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha'_n q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad n \geq 2$$

(If α is rational, then this hold up to $n = N$)

Also we ask ;

(가) Let $\alpha_n = [a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n]$. Then does $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ exist ?

(나) Is the representation of an irrational number by a simple continued fraction unique ?

LEMMA 3 We have

$$q_n\alpha - p_n = \frac{(-1)^n \delta_n}{q_{n+1}}, \qquad 0 < \delta_n < 1$$

and $\dfrac{\delta_n}{q_{n+1}}$ is a decreasing function of n. (If α is rational, then this holds only for $1 \leq n \leq N-2$, and $\delta_{N-1} = 1$.)

proof ;

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha'_{n+1}\ p_n + p_{n-1}}{\alpha'_{n+1}\ q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha'_{n+1} q_n + q_{n-1})}$$

Hence $$\delta_n = \frac{q_{n+1}}{\alpha'_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}{\alpha'_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

From this we see that $0 < \delta_n < 1$ except when $\alpha_{n+1} = \alpha'_{n+1}$.

Also, from $\alpha'_n = 1 + \dfrac{1}{\alpha'_{n+1}}$ we have

$$\frac{\delta_n}{q_{n+1}} = \frac{1}{\alpha'_{n+1} q_n + q_{n-1}} \geq \frac{1}{(a_{n+1} + 1) q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n+1} + q_n}$$

$$\geq \frac{1}{a_{n-2} q_{n+1} + q_n} = \frac{1}{q_{n+2}} \geq \frac{\delta_{n+1}}{q_{n+2}}$$

In the last inequality, equality sign holds only when α_{n+1}

$= \alpha'_{n+1}$, that is when α is rational and $n = N-1$

LEMMA 4 We have

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

with the equality sign only when α is rational and $n=N-1$

proof ; We can deduce from above lemma.

LEMMA 5 Suppose that $n \geq 1$, $0 < q \leq q_n$ and $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$.

Then $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$. (Best Approximation)

proof ; See [3], p.14, problem 2.

LEMMA 6 Let α be an irrational number. If the rational number $\frac{a}{b}$, where $b \geq 1$ and $(a, b) = 1$, satisfies

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

then $\frac{a}{b}$ is one of the convergents in the continued fraction representation of α.

proof ; Assume that $\frac{a}{b}$ is not convergent of α.

Knowing that q_k form an increasing sequence, we see that there is a unique integer n for which $q_n \leq b < q_{n+1}$. For this n

$$| q_n\alpha - p_n | \leq | b\alpha - a | = b \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b}$$

(By lemma 5)

Thus $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2bq_n}$

From our assumption $| bp_n - aq_n | \geq 1$.

Thus $\frac{1}{bq_n} \leqq \left|\frac{bq_n - aq_n}{bq_n}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$

$$< \frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2}$$

It follows that $b < q_n$. So $\frac{a}{b}$ is one of the convergents $\frac{p_n}{q_n}$, ending the proof.

We know that $(x, y) = (\pm 1, 0)$ are solutions if $D \neq 0$. We use the notation $\square$; '$a = \square$' means that a is a perfect square, i.e., for some $b \geq 0$, $a = b^2$.

(Case Ⅰ) $D < -1$

If $y \neq 0$ then ③ has no solution and if $y = 0$ then $(x, y) = (\pm 1, 0)$ are only solutions.

(Case Ⅱ) $D = 0$

In this case $(x, y) = (\pm 1, a)$ are solutions of ③ for any integer a.

(Case Ⅲ) $D > 0$ and $D = \square$

In this case, we have

$$(x - \sqrt{D}y)(x + \sqrt{D}y) = 1$$

Thus $x - \sqrt{D}y = x + \sqrt{D}y = 1$

or $x - \sqrt{D}y = x + \sqrt{D}y = -1$

i.e., $y = 0$

So $(x, y) = (\pm 1, 0)$ are only solutions of ③.

So we can restrict to the case $D > 0$ and $D \neq \square$.

Let us say that a solution (x, y) of ③ is a "positive solution" provided both x and y are positive.

LEMMA 7 If (p, q) is a positive solution of ③, then $\frac{p}{q}$ is a convergent of the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$

proof ; We have $(p - q\sqrt{D})(p+q\sqrt{D}) = 1$ implying that $p > q\sqrt{D}$ as well as that

$$\frac{p}{q} - \sqrt{D} = \frac{1}{q(p+q\sqrt{D})}$$

As a result,

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{D} < \frac{\sqrt{D}}{q(q\sqrt{D}+q\sqrt{D})} = \frac{1}{2q^2}$$

By lemma 6, $\frac{p}{q}$ is a convergent of the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$.

LEMMA 8 If $\frac{p}{q}$ is a convergent of the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$, then $(x, y) = (p, q)$ is a solution of one of the equations

$$x^2 - Dy^2 = k$$

where $|k| < 1 + 2\sqrt{D}$.

proof ; Since $\frac{p}{q}$ is a convergent of $\sqrt{D}$,

$$|\sqrt{D} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2} \qquad (\text{By lemma } 4)$$

Therefore $|p - q\sqrt{D}| < \frac{1}{q}$. This being so, we have

$$|p+q\sqrt{D}| = |(p-q\sqrt{D}) + 2q\sqrt{D}| < \frac{1}{q} + 2q\sqrt{D} < (1+2\sqrt{D})q$$

These two inequalities combine to yield

$$|p^2 - q^2\sqrt{D}| = |p-q\sqrt{D}|\,|p+q\sqrt{D}| < (1+2\sqrt{D})$$

Without entering into the details of proof, let us simply record the fact ; if D is a positive integer which is not a perfect square, then the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$ necessarily has the form,

$$\sqrt{D} = [a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots]$$

$$=[a_0, \dot{a}_1, a_2, \cdots\cdots, \dot{a}_n]$$
$$=[a_0, \dot{a}_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_3, a_2, a_1, \dot{2a}_0]$$

In the case in which. $D=19$, for instance, the expansion is

$$\sqrt{19} = [4, \dot{2}, 1, 3, 1, 2, \dot{8}]$$

Lemma 7 indicates that if the equation $x^2 - Dy^2 = 1$ possesses a solution, then its positive solutions are to be found among $(x, y) = (p_k, q_k)$ are the convergents of $\sqrt{D}$. The period of the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$ provides the information we need to show that $x^2 - Dy^2 = 1$ actually does have a solution in integers; in fact, there are infinitely many solutions, all obtainable from the convergents of $\sqrt{D}$.

LEMMA 9 Let the convergents of the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$ be $\frac{p_k}{q_k}$, If n is the length of the period of the expansion of $\sqrt{D}$, then

$$p_{kn-1}{}^2 - Dq_{kn-1}{}^2 = (-1)^{kn} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots).$$

proof; For $k \geq 1$, the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$ can be written in the form

$$\sqrt{D} = [a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{kn-1}, x_{kn}]$$

Where $x_{kn} = [2a_0, \dot{a}_1, \cdots\cdots, a_{n-1}, 2\dot{a}_0] = a_0 + \sqrt{D}$

Then $\sqrt{D} = \dfrac{x_{kn}p_{kn-1} + p_{kn-2}}{x_{kn}q_{kn-1} + q_{kn-2}}$

Upon substituting $x_{kn} = a_0 + \sqrt{D}$ and simplifying, this reduces to

$$\sqrt{D}(a_0 q_{kn-1} + q_{kn-2} - p_{kn-1}) = a_0 p_{kn-1} + p_{kn-2} - Dq_{kn-1}$$

Because right-hand side is rational and $\sqrt{D}$ is irrational.

So $a_0 q_{kn-1} + q_{kn-2} = p_{kn-1}$, $a_0 p_{kn-1} + p_{kn-2} = Dq_{kn-1}$

So we have $p_{kn-1}{}^2 - Dq_{kn-1}{}^2 = p_{kn-1}q_{kn-2} - q_{kn-1}p_{kn-2} = (-1)^{kn-2}$
$$= (-1)^{kn}$$

So our proof is complete.

Corollary 1 Let $\frac{p_k}{q_k}$ be the convergents of the continued fraction expansion of $\sqrt{D}$ and let n be the length of the period of the expansion.

(ㄱ) If n is even, then all positive solutions of ③ are given by

$$(x, y) = (p_{kn-1}, q_{kn-1}) \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(ㄴ) If n is odd, then all positive solutions of ③ are given by

$$(x, y) = (p_{2kn-1}, q_{2kn-1}) \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

proof ; It has already been established that any positive solution (x_0, y_0) of ③ is of the form $(x_0, y_0) = (p_k, q_k)$ for some convergent $\frac{p_k}{q_k}$.

Let us define the " fundamental solution " (x_0, y_0) of ③ to be its smallest positive solution. That is, it is the positive solution (x_0, y_0) with the property that $x_0 < x$, $y_0 < y$ for any other positive solution (x, y).

Corollary 1 furnishes the following fact ; If the length of the period of continued fraction expansion of $\sqrt{D}$ is n, then fundamental solution of ③ is given by $(x, y) = (p_{n-1}, q_{n-1})$ when n is even ; and by $(x, y) = (p_{2n-1}, q_{2n-1})$ when n is odd. But finding the fundamental solution can be a difficult task, since the numbers in this solution can be unexpectedly large, even for comparatively small values of D. For example $x^2 - 991y^2 = 1$ has the smallest positive solution

$$\begin{cases} x = 3795164009068119306380148960 80 \\ y = 1205573579033135944744253876 7. \end{cases}$$

THEOREM 2. If (x_1, y_1) is the fundamental solution of ③, then every positive solution of the equation is given by (x_n, y_n), where x_n and y_n are integers determined from $x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$.

proof ; (Step Ⅰ) It is a modest exercise for the reader to check that $x_n - y_n\sqrt{D} = (x_1 - y_1\sqrt{D})^n$

Further, since (x_1, y_1) are positive, (x_n, y_n) is positive.

Thus, $x_n^2 - Dy_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{D})(x_n - y_n\sqrt{D})$

$= (x_1 + y_1\sqrt{D})^n (x_1 - y_1\sqrt{D})^n$

$= (x_1^2 - Dy_1^2)^n = 1$

So (x_n, y_n) is a solution for all n.

(Step Ⅱ) Let us suppose that there exists a positive solution (u, v) which is not obtainable by the formula $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n$. Since $x_1 + y_1\sqrt{D} > 1$, the powers of $x_1 + y_1\sqrt{D}$ become arbitrarily large. So assume that

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^n < u + v\sqrt{D} < (x_1 + y_1\sqrt{D})^{n+1}$$

So $x_n + y_n\sqrt{D} < u + v\sqrt{D} < (x_n + y_n\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D})$

Then $1 < (x_n - y_n\sqrt{D})(u + v\sqrt{D}) < x_1 + y_1\sqrt{D}$

Let $r + s\sqrt{D} = (x_n - y_n\sqrt{D})(u + v\sqrt{D})$. So

$r = x_n u - y_n v D, \quad s = x_n v - y_n u$

Then $r^2 - s^2 D = (x_n^2 - Dy_n^2)(u^2 - Dv^2) = 1$

So (r, s) is a solution of ③ satisfying $1 < r + s\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}$

(Step Ⅲ) To complete the proof, we shall prove that (r, s) is a positive solution.

Because $1 < r + s\sqrt{D}$, we find that $0 < r - s\sqrt{D} < 1$.

In consequence.

$$2r = (r+s\sqrt{D}) + (r-s\sqrt{D}) > 1 > 0,$$
$$s\sqrt{D} = (r+s\sqrt{D}) - (r-s\sqrt{D}) > 1 - 1 = 0$$

So (r, s) is a positive.

Corollary 2 If $D > 0$ and $D \neq \square$, then ③ has infinitely many solutions. If (x_1, y_1) is the fundamental solution, then every solution of ③ is given by (x, y) where

$$\pm(x_1 + y_1\sqrt{D})^n = x + y\sqrt{D}$$

for all integer n.

proof ; By theorem 2, every positive solution is given by (x, y) where $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n = x + y\sqrt{D}$ and all positive integer n.

For non-positive solution, there are three cases.

(Case 1) $x>0$, $y<0$; $x+y\sqrt{D} = (x_1+y_1\sqrt{D})^n$ when $n<0$

(Case 2) $x<0$, $y>0$; $x+y\sqrt{D} = -(x_1+y_1\sqrt{D})^n$ when $n<0$

(Case 3) $x<0$, $y<0$; $x+y\sqrt{D} = -(x_1+y_1\sqrt{D})^n$ when $n>0$

(**EXAMPLE**) Solve the Pell's equation $x^2 - 7y^2 = 1$

solution : $\sqrt{7} = [2, \dot{1}, 1, 1, \dot{4}]$

And the initial twelve convergents are

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48}, \frac{590}{223}, \frac{717}{271}, \frac{1307}{494}, \frac{2024}{765}.$$

And the length of this expansion is 4.

Thus $(p_3, q_3) = (8, 3)$ is the fundamental solution.

So general solution is given by (x, y) where

$$x + y\sqrt{D} = \pm(8+3\sqrt{7})^n \quad \text{for all} \quad n \in Z$$

n	x	y
0	1	0
1	8	3
2	127	48
3	2024	765

etc.

(3) $x^2 - Dy^2 = k$ (Generalized Pell's equations)

We immediately know that if $\frac{p}{q}$ is a convergent of α, then $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$. But the converse of this not true. We shall now determine a necessary and sufficient condition for $\frac{p}{q}$ to be a convergent of α.

THEOREM 3 (Legendre's Criterion)

Let $\varepsilon\vartheta = q^2\alpha - pq$, $\varepsilon = \pm 1$, $0 < \vartheta < 1$, and let $\frac{p}{q} = [a_0, \cdots, a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $(-1)^{n-1} = \varepsilon$. Then, a necessary and sufficient condition for $\frac{p}{q}$ to be a convergent of α is that

$$\vartheta \le \frac{q_{n-1}}{q_{n-1} + q_{n-2}}$$

proof ; We can now write $\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{\varepsilon\vartheta}{q_{n-1}^2}$.

We define β by $\alpha = \frac{p_{n-1}\beta + p_{n-2}}{q_{n-1}\beta + q_{n-2}}$ so that

$$\frac{\varepsilon\vartheta}{q_{n-1}^2} = \frac{p_{n-1}\beta + p_{n-2}}{q_{n-1}\beta + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}(q_{n-1}\beta + q_{n-2})}$$

Therefore $\vartheta = \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}\beta + q_{n-2}}$ i.e., $\beta = \frac{q_{n-1} - \vartheta q_{n-2}}{\vartheta q_{n-1}}$.

Since $0 < \vartheta < 1$ we see that $\beta > 0$.

Now $\alpha = [a_0, \cdots\cdots, a_{n-1}, \beta]$. If $\beta \geq 1$, then $\beta = \alpha'_n$, and this means that $\frac{p}{q}$ is a convergent of α. If $0 < \beta < 1$, then

$[a_{n-1} + \frac{1}{\beta}] = a_{n-1} + c$, $c > 0$ so that $\alpha = [a_0, \cdots\cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + c, \cdots\cdots]$ and we see that $[a_0, \cdots\cdots, a_{n-1}]$ is not a convergent. So our proof is complete.

LEMMA 10 In the continued fractions expansion of $\sqrt{D}$, the numbers α'_n must take the form.

$$\frac{\sqrt{D} + A_n}{B_n}, \qquad A_n^2 \equiv D \pmod{B_n}$$

where A_n and B_n are integers.

proof ; We use induction on n. First, $\sqrt{D} - [\sqrt{D}] = \frac{1}{\alpha'_1}$ so that the required result holds by setting $A_1 = [\sqrt{D}]$ $B_1 = D - [\sqrt{D}]^2$. We now assume as induction hypothesis that $\alpha'_n = \frac{\sqrt{D} + A_n}{B_n}$. Since $\alpha'_n = a_n + \frac{1}{\alpha'_{n+1}}$ we have to find two integers A_{n+1}, B_{n+1} such that

$$\frac{\sqrt{D} + A_n}{B_n} = a_n + \frac{B_{n+1}}{\sqrt{D} + A_{n+1}}$$

and $A_{n+1}^2 \equiv D$ (mod B_{n+1}) $\cdots\cdots$ (*)

This means that we have to find A_{n+1}, B_{n+1} so that

$$D + A_n A_{n+1} = a_n B_n A_{n+1} + B_n B_{n+1} \quad \cdots\cdots (**)$$

$$A_n + A_{n+1} = a_n B_n \quad \cdots\cdots (***)$$

From (*), (**), (***) we have $D - A_{n+1}^2 = B_n B_{n+1}$ $\cdots\cdots$ (****)

If (****) holds, then also (*) holds ; and (**) follows from (***) and (****). It remains therefore to find A_{n+1}, B_{n+1} so that (***) and (****) are satisfied.

From (***) we have $A_n^2 \equiv A_{n+1}^2$ (mod B_n).

We see that $D \equiv A_{n+1}^2$ (mod B_n) so that there exists B_{n+1} Satisfying (****).

THEOREM 4 The equation $x^2 - Dy^2 = (-1)^n B_n$ is always soluble.

If $k \neq (-1)^n B_n$ and $|k| < \sqrt{D}$, then the equation $x^2 - Dy^2 = k$ has no solution.

proof ; We have

$$\sqrt{D} = \frac{p_{n-1}\alpha'_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha'_n + q_{n-2}} = \frac{p_{n-1}(\sqrt{D} + A_n) + p_{n-2}B_n}{q_{n-1}(\sqrt{D} + A_n) + q_{n-2}B_n}$$

and since $\sqrt{D}$ is irrational, we have, on clearing the denominators, $p_{n-1} = q_{n-1}A_n + q_{n-2}B_n$, $Dq_{n-1} = p_{n-1}A_n + p_{n-2}B_n$

So we have

$$p_{n-1}^2 - Dq_{n-1}^2 = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})B_n = (-1)^n B_n.$$

For the last part of our theorem, we shall prove the following statement ; Let p, q be positive integers satisfying $|p^2 - \alpha^2 q^2| < \alpha$, then $\frac{p}{q}$ is a convergent of α.

Let $\alpha^2 q^2 - p^2 = \varepsilon\delta\alpha$, $\varepsilon = \pm 1$, $0 \leq \delta < 1$. Then $\alpha q - p = \frac{\varepsilon\delta\alpha}{\alpha q + p}$, so that $\vartheta = \varepsilon q(\alpha q - p) = \frac{\delta\alpha q}{\alpha q + p} = \frac{\delta\alpha q_{n-1}}{\alpha q_{n-1} + p_{n-1}}$, $(-1)^{n-1} = \varepsilon$.

From Legendre's criterion we see that it suffices to prove that $\frac{\delta\alpha q_{n-1}}{\alpha q_{n-1} + p_{n-1}} < \frac{q_{n-1}}{q_{n-1} + q_{n-2}}$ or that $\delta\alpha(q_{n-1} + q_{n-2}) < \alpha q_{n-1} + p_{n-1}$.

Now this inequality holds when $n = 2$. So that it suffrces to establish $\alpha q_{n-1} - p_{n-1} < \alpha(q_{n-1} - q_{n-2})$ for $n > 2$.

But $\alpha q_{n-1} - p_{n-1} = \frac{\varepsilon\delta\alpha}{\alpha q_{n-1} + p_{n-1}}$, and by lemma 2 we have

$$q_{n-1} - q_{n-2} \geq 1 > \frac{1}{\alpha q_{n-1} + p_{n-1}}$$

So our statement is true.

It follows that the last part is true.

Consider the equation $x^2 - Dy^2 = k$ .... ④
If $|k| < \sqrt{D}$, then by theorem 4, all the solutions can be obtained from the continued fractions expansion for $\sqrt{D}$.
That is ; Let m be the period of the continued fraction expansion for $\sqrt{D}$. Let $n > L$ and $p_{n-1}{}^2 - Dq_{n-1}{}^2 = (-1)^n B_n$. Then $p^2{}_{n-1+km} - Dq^2{}_{n-1+km} = (-1)^{n+km} B_n$.

We now assume that $|k| > \sqrt{D}$. Then we can still reduce it to the case when $|k| < \sqrt{D}$. Let $k = \delta k_0$, $k_0 > 0$. $\delta = \pm 1$.
Suppose that (x, y) is a solution of ④. Then there exists (x_1, y_1) such that $xy_1 - yx_1 = \delta$ .... ⑤
So $(xx_1 - Dyy_1)^2 - D(xy_1 - x_1 y)^2 = \delta k_0 (x_1{}^2 - Dy_1{}^2)$
or $(xx_1 - Dyy_1)^2 - D = \delta k_0 (x_1^2 - Dy_1^2)$.
Let (x_0, y_0) be a solution of ⑤. Then all the solutions to ⑤ are given by $x_1 = x_0 + tx$, $y_1 = y_0 + ty$ so that $xx_1 - Dyy_1 = xx_0 - Dyy_0 + (x^2 - Dy^2)t = xx_0 - Dyy_0 + \delta t k_0$. We may therefore choose t so that $|xx_1 - Dyy_1| \leq \frac{k_0}{2}$.

Let $|xx_1 - Dyy_1| = l$. Then $x_1^2 - Dy_1^2 = \dfrac{l^2 - D}{\delta k_0} = \eta h$,

$$\eta = \pm 1, \quad h > 0.$$

Therefore $h \leq \dfrac{max\ (D, l^2)}{k_0} < \dfrac{k_0^2}{k_0} = k_0$

From this we see that from a solution of ④ we arrived at a similar equation with number k which is smaller.
If this number is still greater than $\sqrt{D}$ we can repeat the argument.
We first solve for all those l satisfying $l^2 \equiv D \pmod{k_0}$, $0 \leq l < \frac{k_0}{2}$, and we let them be $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_t$. Set $\dfrac{l_i^2 - D}{\delta k_0} = \eta_i h_i$, $\eta_i = \pm 1$, $h_i > 0$ and solve the system $x_i^2 - Dy_i^2 = \eta_i h_i$ $(1 \leq i \leq t)$. Suppose that $h_i < \sqrt{D}$. Then

we use the method of continued fractions. Let (x_i, y_i) be a solution. Then

$$(x, y) = \left(\frac{-\delta D y_i \pm l_i x_i}{\eta_i h_i} , \frac{-\delta x_i \pm l_i y_i}{\eta_i h_i} \right)$$

is a solution of ④.

(**EXAMPLE**) Solve the equation $x^2 - 15y^2 = 61$ ·············· (*)

solution: First, solve $l^2 \equiv 15 \ (mod\ 61)$, $0 \leq l \leq \frac{61}{2}$.

i.e., $l^2 = 15 + 61h$, $l^2 \leq 900$ so $h = 10$, $l = 25$.

Now we solve $x_1^2 - 15y_1^2 = 10$ ·································· (**)

Since $10 > \sqrt{15}$, we consider $l^2 = 15 + 10h$, $l \leq \frac{10}{2}$.

This gives $h = 1$, $l = 5$ so that we have to solve

$$x_2^2 - 15y_2^2 = 1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (***)$$

From the method of continued fractions, the solutions of (***) are given by $x_2 + \sqrt{15}\, y_2 = \pm(4 + \sqrt{15})^n$. Therefore $x_1 + \sqrt{15}\, y_1 = \pm(4 + \sqrt{15})^n (5 \pm \sqrt{15})$ and so

$$x + \sqrt{15}\, y = \pm(4 + \sqrt{15})^n (5 \pm \sqrt{15})(25 \pm \sqrt{15}) / 10$$

Here three signs $\pm$ are independent so that either

$$x + \sqrt{15}\, y = \pm(4 + \sqrt{15})^n (14 \pm 3\sqrt{15})$$

or

$$x + \sqrt{15}\, y = \pm(4 + \sqrt{15})^n (11 \pm 2\sqrt{15}).$$

(4) $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (Quadratic equations)

We shall solve the equation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑥$$

We write $D = b^2 - 4ac$. Assume that $D = 0$. Then we multiply ⑥ by $4a$ giving $(2ax + by)^2 + 4adx + 4aey + 4af = 0$, which is not a difficult equation to solve.

Let $2ax + by = t$ so that

$$t^2 + 2(2ae - bd)y + 4af = -2dt,$$

$$(t + d)^2 = 2(bd - 2ae)y + d^2 - 4af.$$

Then the number t can be obtained from the congruence $(t+d)^2 \equiv d^2 - 4af \pmod{2(bd - 2ae)}$, and so x, y can be solved.

Now we assume that $D \neq 0$. Multiplying ⑥ by D^2

We have $aD^2x^2 + bD^2xy + cD^2y^2 + dD^2x + eD^2y + fD^2 = 0$

Substituting $Dx = x' + 2cd - be$, $Dy = y' + 2ae - bd$ into our formula we have

$$a(x' + 2ce - be)^2 + b(x' + 2cd - be)(y' + 2ae - bd)$$
$$+ c(y' + 2ae - bd)^2 + d(x' + 2cd - be)D$$
$$+ e(y' + 2ae - bd)D + fD^2 = 0$$

i.e.,

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 = k \quad \cdots\cdots ⑦$$

where $-k = a(2cd - be)^2 + b(2cd - be)(2ae - bd) + c(2ae - bd)^2$
$$+ dD(2cd - be) + eD(2ae - bd) + fD^2$$

We see therefore that whether ⑥ is soluble depends on whether ⑦ has solutions satisfying

$$x' \equiv be - 2cd, \quad y' \equiv bd - 2ae \pmod{D}$$

So we discuss the equation ⑦$'$.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = k \quad \cdots\cdots ⑦'$$

(Case Ⅰ) $a = c = 0$; We have $bxy = k$, so if $b \nmid k$ then ⑦$'$ has no solution and if $b \mid k$ then ⑦$'$ has solutions and it easy to solve.

Let $D = b^2 - 4ac$. It is called the discriminant.

(Case Ⅱ) $a \neq 0$ or $c \neq 0$

Without loss of generality, we assume that $a \neq 0$.

From ⑦$'$ we have $(2ax + by)^2 - (b^2 - 4ac)y^2 = 4ak$. i.e.,

$$(2ax + by)^2 - Dy^2 = 4ak.$$

(가) $D=0$; We have $(2ax+by)^2=4ak$.

If $4ak$ is a square number, then we have.

$$2ax+by=\pm 2\sqrt{ak}$$

It is the problem of (1).

Otherwise then ⑦′ has no solution.

(**EXAMPLE**) Solve the equation $18x^2-60xy+50y^2=8$

solution: We have $2(3x-5y)^2=8$. i.e., $3x-5y=\pm 2$

So we get solutions

$(x,\ y)=(4+5t,\ 2+3t)$ or $(x,y)=(1+5t,\ 1+3t)$

where $t\in Z$.

(나) $D=0$, $D=\square$; Then we have

$$\{2ax+(b-\sqrt{D})y\}\ \{2ax+(b+\sqrt{D})y\}=4ak$$

Put $4ak=mn$. And we solve the following equations $2ax+(b-\sqrt{D})y=m$, $2ax+(b+\sqrt{D})y=n$.

It B the problem of (1).

(**EXAMPLE**) Solve the equation $2x^2-3xy-2y^2=18$.

solution: We have $D=25$. And $(x-2y)(2x+y)=18$

$2x+y$	1	2	3	6	9	18
$x-2y$	18	9	6	3	2	1
x	4	·	·	3	4	·
y	-7	·	·	0	1	·

Thus $(x,y)=(4,-7),(-4,7),(3,0),(-3,0),(4,1),(-4,-1)$

(다) $D<0$; In this case $-D=|D|$, so we have

$$(2ax+by)^2+|D|y^2=4ak$$

Thus the necessary condition that this equation has a solution is $ak>0$ and $|D|y^2\leq 4ak$.

Thus we can find x for the integer y such that

$$|y|\leq\sqrt{\frac{4ak}{|D|}}.$$

Of course it suffices that we consider the case $y \geq 0$.

(**EXAMPLE**) Solve the equation $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 35$

solution : In this example, we have $D = -20$ and $|y| \leq \sqrt{21}$.
So $|y| \leq 4$

y	0	1	2	3	4
x	·	4	·	·	1

Thus $(x, y) = (4, 1), (-4, -1), (1, 4), (-1, -4)$

(라) $D > 0$, $D \neq \square$; In this case, it is the problem of (2) .

THEOREM 5 We call (x, y) the proper solution if $(x, y) = 1$.

Let (x, y) be a proper solution to ⑦′ . Then there are two uniquely determined integers s and r satisfying

$$xs - yr = 1 \quad \cdots\cdots (ㄱ)$$

and the integer $l = (2ax + by)r + (bx + 2cy)s$

satisfies $l^2 \equiv D(\mathrm{mod}\ 4k)$, $0 \leq l < 2k$ ⋯⋯ (ㄴ)

proof ; Let (r_0, s_0) be a solution to (ㄱ). Then the general solution to (ㄱ) is $(r, s) = (r_0 + hx, s_0 + hy)$.

Thus
$$\begin{aligned} l &= (2ax + by)r_0 + (bx + 2cy)s_0 + 2h(ax^2 + bxy + cy^2) \\ &= l_0 + 2hk . \end{aligned}$$

So that we may choose a unique h such that $0 \leq l < 2k$.

Finally we have

$$\begin{aligned} l^2 &= \{(2ax + by)r + (bx + 2cy)s\}^2 \\ &= 4(ar^2 + brs + cs^2)(ax^2 + bxy + cy^2) \\ &\qquad + (b^2 - 4ac)(xs - yr)^2 \\ &\equiv D \ (\mathrm{mod}\ 4k) \end{aligned}$$

THEOREM 6 Let (x_1, y_1) and (x_2, y_2) be two proper solutions corresponding to the same number l in our previous theorem. Then we have

$$2ax_1 + by_1 + \sqrt{D}\, y_1 = (2ax_2 + by_2 + \sqrt{D}\, y_2)\left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right) \quad (ㄷ)$$

where t and u are integers satiseying

$$t^2 - Du^2 = 4 \quad \cdots\cdots \quad (ㄹ)$$

Conversely, if (x_2, y_2) is a proper solution, then the numbers (x_1, y_1) defined by (ㄷ) also give a proper solution and both solutions correspond to the same number l.

proof ; (1) Put $t = \dfrac{(2ax_1 + by_1)(2ax_2 + by_2) - Dy_1y_2}{2ak}$,

$$u = \frac{-(x_1y_2 - x_2y_1)}{k} .$$

Then

$$\frac{t \mp u\sqrt{D}}{2} = \frac{(2ax_1 + by_1)(2ax_2 + by_2) - Dy_1y_2 \pm 2a(x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{D}}{4ak}$$

$$= \frac{(2ax_1 + by_1 \mp \sqrt{D}\, y_1)\ (2ax_2 + by_2 \pm \sqrt{D}\, y_2)}{(2ax_1 + by_1 + \sqrt{D}\, y_1)\ (2ax_1 + by_1 - \sqrt{D}\, y_1)}$$

$$= \frac{(2ax_1 + by_1 \mp \sqrt{D}\, y_1)\ (2ax_2 + by_2 \pm \sqrt{D}\, y_2)}{(2ax_2 + by_2 + \sqrt{D}\, y_2)\ (2ax_2 + by_2 - \sqrt{D}\, y_2)} .$$

Thus (ㄷ) follows. Next from $\dfrac{t^2 - Du^2}{4} = \dfrac{t + \sqrt{D}u}{2} \cdot \dfrac{t - \sqrt{D}u}{2} = 1$

We see that t and u satisey (ㄹ). Also

$$\begin{aligned} 2ax_1 + by_1 &= (2ax_1 + by_1)(s_1x_1 - r_1y_1) \\ &= (2ax_1 + by_1)\ s_1x_1 - ly_1 + (bx_1 + 2cy_1)s_1y_1 \\ &\equiv -ly_1 \quad (mod\ \ 2k) \end{aligned}$$

Similary we have $\quad 2ax_2 + by_2 \equiv -ly_2 \quad (mod\ \ 2k)$

Therefore $\quad 2a(x_1y_2 - x_2y_1) \equiv 0 \qquad (mod\ \ 2k)$

$$(b + l)(x_1y_2 - x_2y_1) \equiv 0 \qquad (mod\ \ 2k)$$

Similarly we have

$$2c(x_1y_2 - x_2y_1) \equiv 0 \qquad (mod\ \ 2k)$$

$$(b - l)(x_1y_2 - x_2y_1) \equiv 0 \qquad (mod\ \ 2k)$$

But $(2a, b+l, b-l, 2c) = (2a, 2b, 2c, b+l) \leq 2$

So that $x_1 y_2 - x_2 y_1 \equiv 0 \pmod{k}$

This shows that u is an integer. Therefore t^2 is an integer, and since t is rational, t itself must be an integer.

(2) Suppose that (ㄷ) and (ㄹ). Then

$$x_1 = \frac{t-bu}{2} x_2 - cuy_2, \quad y_1 = aux_2 + \frac{t+bu}{2} y_2$$

Let r_1, s_1 correspond to the solution x_1, y_1. Then

$$r_2 = \frac{t+bu}{2} r_1 + cus_1, \quad s_2 = -aur_1 + \frac{t-bu}{2} s_1$$

correspond to the solution x_2, y_2, because

$$1 = x_1 s_1 - y_1 r_1 = \left(\frac{t-bu}{2} x_2 - cuy_2 \right) s_1 - \left(aux_2 + \frac{t+bu}{2} y_2 \right) r_1$$

$$= x_2 \left(\frac{t-bu}{2} s_1 - aur_1 \right) - y_2 \left(cus_1 + \frac{t+bu}{2} r_1 \right)$$

$$= x_2 s_2 - y_2 r_2 .$$

Finally, let l_1 and l_2 correspond to (x_1, y_1) and (x_2, y_2), respectively. Then $l_1 = 2ax_1 r_1 + b(x_1 s_1 + y_1 r_1) + 2cy_1 s_1$

$$= (2ar_1 + bs_1)\left(\frac{t-bu}{2} x_2 - cuy_2\right) + (br_1 + 2cs_1)\left(aux_2 + \frac{t+bu}{2} y_2 \right)$$

$$= \left\{2a\left(r_1 \frac{t-bu}{2} + s_1 uc\right) + b\left(s_1 \frac{t-bu}{2} + r_1 au\right)\right\} x_2$$

$$+ \left\{b\left(r_1 \frac{t+bu}{2} - s_1 cu\right) + 2c\left(s_1 \frac{t+bu}{2} - r_1 au\right)\right\} y_2$$

$$= 2ax_2 r_2 + b(x_2 s_2 + y_2 r_2) + 2cy_2 s_2 = l_2$$

Our proof is complete.

Let (x_0, y_0) be a solution of $x^2 - Dy^2 = 4$ in which $x_0 + y_0\sqrt{D}$ is least ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$).

Let $\varepsilon = \dfrac{x_0 + y_0\sqrt{D}}{2}$, $\bar{\varepsilon} = \dfrac{x_0 - y_0\sqrt{D}}{2}$ and let

$$L = 2ax + by + \sqrt{D}y \qquad \overline{L} = 2ax + by - \sqrt{D}y.$$

DEFINITION Let $D > 0$. By a primary solution to ⑦′ we mean a solution which satisfies.

$$\overline{L} > 0 \qquad 1 \leq \left|\frac{L}{\overline{L}}\right| < \varepsilon^2$$

THEOREM 7 Let $D > 0$. If ⑦′ has proper primary solutions which correspond to the same l, then it has a unique proper primary solution.

proof ; From theorem 6 we know that if (x_0, y_0) is a proper primary solutions to ⑦′, then, on denoting by L_0, the associated number L, every proper solution of ⑦′ corresponding to the same l can be represented by $L = \pm L_0 \varepsilon^n$. We have

$$\left|\frac{L}{\overline{L}}\right| = \left|\frac{L_0 \varepsilon^n}{\overline{L}_0 \overline{\varepsilon}^n}\right| = \left|\frac{L_0}{\overline{L}_0}\right| \varepsilon^{2n}$$

so that $1 \leq \left|\frac{L}{\overline{L}}\right| < \varepsilon^2$ only when $n = 0$, and in this case $\overline{L} = \overline{L}_0 > 0$.

Theorem 7 suggestes that in solving the equation ⑦′ there is no need to search for integer points on the whole hyperbola. The primary solution occurs in a finite part of the hyperbola, and having obtained the primary solution we may use the formula $L = \pm L_0 \varepsilon^n$ to find all the other solutions. That is, if ε is know, all the solutions can be obtained in a finite steps. Specifically, from

$$L_0 \overline{L}_0 = 4ak, \quad \overline{L}_0 > 0, \quad 1 \leq \left|\frac{L_0}{\overline{L}_0}\right| < \varepsilon^2$$

We see that

$$|\overline{L}_0| \leq |L_0| = \sqrt{\left|\frac{L_0 \overline{L}_0}{\overline{L}_0}\right|^2} = 2\sqrt{|ak|}\sqrt{\left|\frac{L_0}{\overline{L}_0}\right|} < 2\sqrt{|ak|}\,\varepsilon$$

or

$$|2\sqrt{D}y| = |L_0 - \bar{L}_0| \leq |L_0| + |\bar{L}_0| < 4\sqrt{|ak|}\ \varepsilon$$

giving $\quad |y| \leq 2\varepsilon\sqrt{\dfrac{|ak|}{D}}$

That is we need only find a solution which satisfies

$0 \leq y \leq 2\varepsilon\sqrt{\dfrac{|ak|}{D}}$ and the rest can be obtained from

$L = \pm L_0 \varepsilon^n$.

When $a>0, k>0$ we deduce from $\bar{L} > 0$ and $\bar{L}L > 0$ that $L > 0$, and whence $\bar{L} < L$ so that

$$0 < 2\sqrt{D}y = L - \bar{L} \leq L = \sqrt{L\bar{L}\frac{L}{\bar{L}}} \leq \varepsilon\sqrt{4ak}.$$

Therefore $\quad 0 < y \leq \varepsilon\sqrt{\dfrac{ak}{D}}$. .... (A)

(EXAMPLE) Solve the equation $2x^2 - 10xy + 11y^2 = 11$.

solution : we have $D = 12$. We solve the equation

$t^2 - Du^2 = t^2 - 12u^2 = 4$. From the section (3)

We have $l = 0$ and $l = 2$. ($\because$ $l^2 \equiv 12 \pmod 4$)

So $l_1 = 0$, $\eta_1 = -1$, $h_1 = 3$ and

$l_2 = 2$, $\eta_2 = -1$, $h_2 = 2$.

So we shall solve the two equations

$x_1^2 - 12y_1^2 = -3$ .... ①*

$x_2^2 - 12y_2^2 = -2$ .... ②*

Since $3<12$ and $2<\sqrt{12}$ and $\sqrt{12} = [3\,;\,\dot{2}, \dot{6}]$,

we have the following table. [3]

q_s		3	2	6	2	6
P_s	1	3	7	45	97	627
Q_s	0	1	2	13	28	181

Thus ①* has smallest positive solution (3, 1), and ②* has no solutions.

That is, $\{(x, y) \mid x+\sqrt{12}\,y = \pm(3+2\sqrt{3})^{2n+1}\cdot 3^{-n},$
$n = 0, \pm 1, \cdots\cdots\}$ is solution of ①*.

So $\{(t, u) \mid t+\sqrt{12}\,u = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3^{n+1}}(3+2\sqrt{3})^{2n+1},$
$n = 0, \pm 1, \cdots\cdots\} = \{(t, u) \mid \frac{t+\sqrt{12}u}{2} = \pm(2+\sqrt{3})^n\}$
is solution of $t^2 - 12u^2 = 4$.

And from (A), $0 < y \leq \varepsilon\sqrt{\frac{ak}{D}} = 5.05 \cdots\cdots$.

We have

y	1	2	3	4	5
x	0, 5	·	11, 4	·	·

By theorem 5, we have $l = 10$, $l = 12$ ($l^2 \equiv 12 (mod\ 44)$, $0 \leq l < 22$). Then (0, 1) and (11, 3) correspond to $l = 10$, (5, 1) and (4, 3) correspond to $l = 12$.

So by theorem 6, we have that our solution (x, y) satisfies the following equation.

$2x - 5x + \sqrt{3}\,y = \pm(5-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$ ……… (ㄱ)

$2x - 5y + \sqrt{3}\,y = \pm(5+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$ ……… (ㄴ)

$n \in Z$

Here is our solutions.

(ㄱ)

n	$\pm x$	$\pm y$
3	165	49
2	44	13
1	11	3
0	0	- 1
- 1	- 11	- 7
- 2	- 44	- 27

(ㄴ)

n	$\pm x$	$\pm y$
3	340	101
2	91	27
1	24	7
0	5	1
- 1	- 4	- 3
- 2	- 21	- 13

(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ (Markov's equation) ⑧

THEOREM 8 Let x_0, y_0, z_0 be a solution to ⑧. Then so is $x_0, y_0, 3x_0y_0 - z_0$.

(proof) $x^2 + y_0^2 + (3x_0y_0 - z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 6x_0y_0z_0 + 9x_0^2y_0^2$

$$= -3x_0y_0z_0 + 9x_0^2y_0^2 = 3x_0y_0(3x_0y_0 - z_0).$$

THEOREM 9 Every solution of ⑧ can be generated from Theorem 8 with $x = y = z = 1$ as an initial solution.

(proof) (1) $x = y = z$; $x = y = z = 1$.

(2) $x = y \neq z$; $2x^2 + z^2 = 3x^2z$. So $x^2 | z^2$ (or $x | z$).
Let $z = wx$. Then $2 + w^2 = 3wx$ ($w > 0$). So $w | 2$, i.e., $w = 1$ or 2. But $x \neq z$ so that $w = 2$ giving (1, 1, 2) and this is a solution generated by (1, 1, 1) from theorem 8.

(3) $x < y < z$; From $z^2 - 3xyz + z^2 + y^2 = 0$ we have

$$2z = 3xy \pm \sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)}$$

If $2z = 3xy - \sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)}$, then from

$$8x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4x^2(y^2 - 1) + 4y^2(x^2 - 1) > 0$$

$$2z < 3xy - xy < 2xy \qquad \text{i.e.,} \qquad z < xy.$$

But $3xyz = x^2 + y^2 + z^2 < 3z^2$ i.e., $z > xy$.

It is a contradiction. Therefore

$$2z = 3xy + \sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)} > 3xy$$

i.e., $3xy - z < z$.

In this case, we can reduce the value of $x + y + z$, so that after a finite number of successive steps x, y, z cannot be all different which means that we have reduce the present case (1), (2).

Here is solution table such that $x \leq y \leq z \leq 1{,}000$.

z	1	2	5	13	29	34	89	169	194	233	433	610	985
y	1	1	2	5	5	13	34	29	13	89	295	233	169
x	1	1	1	1	2	1	1	2	5	1	25	1	2

Generally, we can discuss the equation $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = nx_1 \cdots x_n$. If $(x_1, \cdots, x_n)$ is a solution, $(x_1, \cdots, x_{n+1}, nx_1x_2 \cdots x_{n-1} - x_n)$ is a solution. $(n \geq 3)$. If $n = 2$, then $x = y$ is the solution.

(6) $x^n + y^n = z^n$ (Fermat's equation)

Pierre de Fermat was French judge who lived in Toulouse. In the margin of his copy of Bachet's edition of the complete works of Diophantus, Fermat wrote ; It is impossible to separate a cube into two cubes, or a biquadrate into two biquadrates, or in general any power higher than the second into powers of like degree. I have discovered a truly remarkable proof which this margin is too small to contain.

Pythagoras was supposed to have proven that lengths a, b, c of the sides of a right - angle triangle satisfy the relation $a^2 + b^2 = c^2$. But the situation is already very different for cubes, biquadrates and so on. For this case $n = 2, 3, 4, 5, 7, 14$, see [5].

I shall introduce the Kummer's main theorem without proof.

Kummer was born January 29, 1810 in Sorau in der Niederlausitz (Province of Brandenburg). His family was rather poor and became almost destitute, when his father died of typhus. (Kummer was then 3-year-old.). In 1828, he entered the university in Halle. His interests were philosophy and mathematics. As a third-year student, Kummer solved a "Problem for prize", beginning to assert his very special mathematical talent. In 1842, he was appointed at the Univ. of Breslau and the same year, he became a corresponding member of the Berlin Academy of Science. In 1855, he was appointed a professor at the Univ. of Berlin, succeeding Dirichlet, who died a few years later. In Berlin, he taught courses about analytic geometry, analytic mechanics, surfaces, number theory and he acquired thereby a solid reputation as a teacher. He married twice and was the father of nine children. He died at the age of 83, of influenza, on May 14, 1893.

In order to prove Fermat's claim it suffices to establish the case $n=4$ and when n is an odd prime. (To the reader).

Kummer's Main Theorem

If p is a regular prime, there exist no (nonzero) cyclotomic integers α, β, γ such that $\alpha^p+\beta^p+\gamma^p=0$.

Let $p \geq 3$ be a prime number and $\zeta=\zeta_p$ be a primitive pth root of 1.

A prime p said to be *regular* if does not divide $h=h(p)$ (it is called the class number) of the cyclotomic field $K=Q(\zeta)$. In this case. $h(p)=h_1(p)h_2(p)$ where

$$h_1(p)=\frac{1}{(2p)^{(p-3)/2}}\left| G(\eta)G(\eta^3)\cdots\cdots G(\eta^{p-2})\right|$$

and $$h_2(p)=\frac{2^{(p-3)/2}}{R}\prod_{k=1}^{(p-3)/2}\left|\sum_{j=0}^{(p-3)/2}\eta^{2kj}\log\left|1-\zeta^{g^j}\right|\right|$$

where η is a primitive $(p-1)$th root of 1, g is a primitive root modulo p, $g_j \equiv g^j \ (mod\ p)$ with $1 \leq g_j \leq p-1$ and

$$G(X)=\sum_{j=0}^{p-2} g_i X^j$$

The proof will be introduced in next article.

(7) $mx^2 - ny^2 = \pm 1$ (Walker's equations)

In this section, we shall develop a formula for all solutions of the title equation due to D. T. Walker.

In this discussion, we are concerned with positive integral solutions of $mx^2 - ny^2 = \pm 1$, where m and n are positive integers and neither is a perfect square. We shall treat both equations together as

$$mx^2 - ny^2 = \pm 1. \qquad ⑨$$

Morever, we will develop relations between solutions of, when it is solvable, and solutions of the Pell's equation in the form.

$$r^2 - mns^2 = 1, \qquad ⑩$$

with which we will frequently be concerned.

DEFINITION A solution (x, y) of ⑨ is a positive solution of ⑨ if both x and y are positive.

It can be shown easily that if (x_0, y_0) and (x_1, y_1) are positive solutions of ⑨ then the following statements are equivalent : (i) $x_0 < x_1$, (ii) $y_0 < y_1$,

(iii) $x_0\sqrt{m} + y_0\sqrt{n} < x_1\sqrt{m} + y_1\sqrt{m}$

DEFINITION A solution (x, y) of ⑨ is the smallest solution of ⑨ if it is the positive solution in which both x and y have their least values.

LEMMA 11 If (x, y) is a solution of ⑨, and (r, s) is a solution of ⑩, then $(xr + nys, yr + mxs)$ is a solution of ⑨.

proof : $(mx^2 - ny^2)(r^2 - mns^2) = (\pm 1)\cdot 1 = m(x^2r^2 + n^2y^2s^2) - n(y^2r^2 + m^2x^2s^2) = m(xr + nys)^2 - n(yr + mxs)^2 = \pm 1$.

LEMMA 12 If (x, y) and (x', y') are solutions of ⑨, then $(mxx' + nyy', xy' + x'y)$ is a solution of ⑩.

proof : $(mx^2-ny^2)(mx'^2-ny'^2)=(\pm1)(\pm1)=(mxx'+nyy')^2$
$-mn(xy'+x'y)^2=1.$

For the remainder of this discussion we will sometimes denote solutions $x\sqrt{m}+y\sqrt{n}$ and $r+s\sqrt{mn}$ of equations ⑨ and ⑩ respectively by (x, y) and (r, s), and the product of two solutions by $(x, y)\cdot(r, s)$. The following function $F(x, y)$ has been studied by K. Peter and F. Arndt.

$$F(x, y)=(x\sqrt{m}+y\sqrt{n})^2=(mx^2+ny^2)+(2xy)\sqrt{mn}$$

for a solution (x, y) of ⑨.

Note that the function F, which maps solutions of ⑨ into solutions of ⑩, has the following properties :

〈i〉 $F(-x, -y)=F(x, y)$, 〈ii〉 $F(x, -y)=\overline{F(x, y)}$, the conjugate of $F(x, y)$,

〈iii〉 $F((x, y)\cdot(r, s))=F(x, y)\cdot(r, s)^2=F(x, y)\cdot(r+s\sqrt{mn})^2$

LEMMA 13 If $F(x, y)=1$, then $m=1$ or $n=1$.

proof : If the equation ⑨ has the plus sign, then
$F(x, y)=(2mx^2-1)+2xy\sqrt{mn}$ and $2mx^2-1=1$, i.e., $m=1$.
Or if the equation ⑩ has the minus sign, then
$F(x, y)=(2ny^2-1)+2xy\sqrt{mn}$ and $2ny^2-1=1$, i.e., $n=1$.

LEMMA 14 If $F(x, y)=(r, s)\cdot(r, s)$ for some solution (x, y) of ⑨ and (r, s) of ⑩, then $m=1$ or $n=1$.

proof : Let $F(x, y)=(r, s)\cdot(r, s)$, and consider

$$F((x, y)\cdot(r, -s))=F(x, y)\cdot(r, -s)\cdot(r, -s)$$
$$=(r, s)\cdot(r, s)\cdot(r, -s)\cdot(r, -s)=1.$$

Take $(w, z)=(x, y)\cdot(r, -s)$. Thus ⑨ has a solution (w, z) Such that $F(w, z)=1$. By lemma 13, $m=1$ or $n=1$.

THEOREM 10 If (x, y) is a positive solution of ⑨ for both $m, n>1$, then $F(x, y)=(r, s)^{2k+1}$ for some nonnegative integer k, and where (r, s) is the fundamental solution of ⑩.

proof : It is a consequence of lemma 11, lemma 12, lemma 14 and [1]corollary 2 restricted $k>0$. (consider corollary 2′)

THEOREM 11 If ⑨ has solution for both m, $n>1$, then ⑨ has a positive solution which maps under F into the fundamental solution of ⑩.

proof : If equation ⑨ is solvable, then it has a positive solution. Let (x, y) be a positive solution of ⑨ and let (r, s) be the fundamental solution of ⑩. By corollary 2′ and theorem 10, for some nonnegative integer k, $F(x, y)=(r, s)^{2k+1}$ $=(u, v)^2\cdot(r, s)$ for some solution (u, v) of ⑩.
Now consider $(w, z)=(x, y)\cdot(u, -v)$. We have $F((x, y)\cdot(u, -v))$ $=(r, s)\cdot(u, v)^2\cdot(u, -v)^2=(r, s)$. Since $F(w, z)=(r, s)$, then w and z have the same sign. So one of (w, z) and $(-w, -z)$ is positive and the other is negative. Using property 〈i〉 If necessary, the positive one, say (w', z'), is a positive solution of ⑨ such that $F(w', z')=(r, s)$.

THEOREM 12 If ⑨ has a positive solution (x, y) $n>1$, $m>1$, (x, y) is the smallest solution of ⑨, if and only if, $F(x, y)$ $=(r, s)$ the fundamental solution of ⑩.

(proof)(⇨)(Due to K. Petr) By the theorem 11, there is a positive solution (w, z) of ⑨ such that $F(x, y)=(r, s)$.
Now if the smallest solution of ⑨ $(x, y)\neq(w, z)$, then by theorem 10, for some nonnegative integer k, $F(x, y)=(r, s)^{2k+1}$. Then

$$F(x, y)=[F(w, z)]^{2k+1},\ \text{i.e.,}\ (x\sqrt{m}+y\sqrt{n})^2$$
$$=[(w\sqrt{m}+z\sqrt{n})^{2k+1}]^2.$$

But $x\sqrt{m}+y\sqrt{n}=(w\sqrt{m}+z\sqrt{n})^{2k+1}$ is impossible if k is a positive integer, since (x, y) is the smallest solution of ⑨.

---

(1) In corollary 2, n is considered k.

Therefore $(x, y) = (w, z)$ i. e., $F(x, y) = (r, s)$.

($\Leftarrow$) (Due to F. Arndt) If equation ⑨ has the plus sign, then $r = 2mx^2 - 1$, or if equation ⑨ has the minus sign, then $r = 2ny^2 - 1$. Let (x_0, y_0) be the smallest solution of ⑨. Then

$$F(x_0, y_0) = (mx_0^2 + ny_0^2) + 2x_0y_0\sqrt{mn} = r_0 + s_0\sqrt{mn}$$

is a solution of ⑩ in which both of r_0, s_0 are positive integer. Now if ⑨ has the plus sign, then $x_0 < x$ implies that $r_0 = 2mx_0^2 - 1 < 2mx^2 - 1 = r$ which is impossible of (r, s) is the fundamented solution of ⑩. Or, if ⑨ has the minus sign, then $y_0 < y$ implies that $r_0 = 2ny_0^2 - 1 < 2ny^2 - 1 = r$, again, impossible.

So, (x, y) is the smallest solution.

THEOREM 13 If equation $r^2 - mns^2 = -1$ is solvable, then ⑨, with both of $m, n > 1$, is not sovable for either sign.

proof : Let $r^2 - mns^2 = -1$ have fundamental solution (r_1, s_1). Then ⑩ has fundamental solution $(r_1^2 + mns_1^2,\ 2r_1s_1) = (2r_1^2 + 1,\ 2r_1s_1)$ since $r_1^2 - mns_1^2 = -1$. Now, supposed that ⑨ with the plus sign is solvable and has smallest solution (x, y). By theorem 12, we have

$$F(x, y) = (2ny^2 + 1) + 2xy\sqrt{mn} = (2r_1^2 + 1) + 2r_1s_1\sqrt{mn}.$$

But $2ny^2 + 1 = 2r_1^2 + 1$ implies $ny^2 = r_1^2$, which is impossible if n is not perfect square. In minus case, we have the contradiction.

THEOREM 14 If ⑨ is solvable for both of $m, n > 1$ and has (x_0, y_0) as its smallest solution, and if k is a non-negative integer, then (x, y) is all positive solution of ⑨ where

$$x\sqrt{m}+y\sqrt{n} = (x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^{2k+1}.$$

proof : By theorem 12, corollary 2′, lemma 11, $(x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{m})^{2k+1} = (x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})(x'\sqrt{m}+y'\sqrt{n})$ for some solution (x', y') of ⑩. Thus $(x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^{2k+1}$ always gives positive solution.

Now suppose that there is a positive solution (w, z) of ⑨ which is not given by $(x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^{2k+1}$. Then for some nonnegative integer k, we have

$$(x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^{2k+1} < w\sqrt{m}+z\sqrt{n} < (x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^{2k+3}$$

If ⑨ has the plus sign, then

$$1 < (w\sqrt{m}+z\sqrt{n})(x_0\sqrt{m}-y_0\sqrt{n})^{2k+1} < (x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^2.$$

If ⑨ has the minus sign, then

$$1 < (-w\sqrt{m}+(-z)\sqrt{n})(x_0\sqrt{m}-y_0\sqrt{n})^{2k+1} < (x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^2.$$

So $[(\pm w)\sqrt{m}+(\pm z)\sqrt{n}](x_0\sqrt{m}-y_0\sqrt{n})^{2k+1} = u+v\sqrt{mn}$ for solution (u, v) of ⑩ by lemma 11, 12. By theorem 12, $(x_0\sqrt{m}+y_0\sqrt{n})^2 = F(x, y) = r+s\sqrt{mn}$ is the fundamental solution of ⑩, so that either case of sign we have

$$1 < u+v\sqrt{mn} < r+s\sqrt{mn}.$$

It is impossible.

EXAMPLE (가) The equation $7x^2-13y^2 = \pm 1$ is not solvable.

solution: $r^2-91s^2 = 1$ has the fundamental solution (1574, 165), but $1574 \neq 2\cdot 7\cdot x^2 \pm 1$ for all x.

(나) Solve the equation $13x^2-29y^2 = 1$.

solution: $r^2-377s^2 = 1$ has the fundamental solution(233, 12) Then $(x, y) = (3, 2)$ satisfy $2\cdot 13x^2-1 = 233$, $2xy = 12$ and $13x^2-29y^2 = 1$. So (x, y) is given by $(3\sqrt{13}+2\sqrt{29})^{2k+1} = x\sqrt{13}+y\sqrt{29}$.

(8) $a + b \cdot 10^k = (a+b)^2$ (Hashway-Lossers equations)

The title problem was proposed by R.M. Hashway and solved by O. P. Lossers. The solutions yield some interesting numbers in the decimal system : for example, 2025 has the property $2025 = 20 \cdot 10^2 + 25 = (20+25)^2$.

The purpose of this section is to generalize this problem by giving a method for solving the diophantine equation

$$x_0 + x_1 A^s + x_2 A^{2s} + \cdots\cdots + x_n A^{ns} = (x_0 + x_1 + \cdots\cdots + x_n)^k \cdots\cdots \quad ⑪$$

where A, s, and k are fixed positive integers. If we replace $x_0 + x_1 + \cdots\cdots + x_n$ by x, we then have

$$x^k = x + x_1(A^s - 1) + x_2(A^{2s} - 1) + \cdots\cdots + x_n(A^{ns} - 1) \cdots\cdots\cdots \quad ⑫$$

and, using the notation $A^s - 1 = B$, we get the congruence

$$x^k \equiv x \pmod{B}. \cdots\cdots \quad ⑬$$

From the solution of ⑬, we can determine the integer values by the variables $n, x_0, \cdots\cdots, x_n$ in ⑫ ; thus it is enough to solve ⑬. Let A be an even integer so that $B = A^s - 1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_r^{\alpha_r}$ is odd where $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_r$ are distinct odd primes and $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots, r$). Let g_i be a primitive root $(mod\ p_i^{\alpha_i})$ and let $d_i = (k-1, \phi(p_i^{\alpha_i}))$, $k-1 = d_i d_i'$, $\phi(p_i^{\alpha_i}) = d_i c_i$, where ϕ is Euler's function. And $p_i = \dfrac{B}{p_i^{\alpha_i}}$ and $G_i = 0$ or $G_i = g_i^{c_i q_i}$ where $q_i = 0, 1, \cdots\cdots, d_i - 1$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots, r$).

THEOREM 15 All the incongruence solution of the congruence ⑬ are $x \equiv \sum_{i=1}^{r} G_i P_i^{\phi(p_i^{\alpha_i})} \pmod{B}$

proof : Congruence ⑬ is equivalent to the congruence system

$$x^k \equiv x \pmod{p_1^{\alpha_1}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^k \equiv x \pmod{p_r^{\alpha_r}}$$

First we solve the congruence

$$x^k \equiv x \qquad (mod\ \ p_i^{\alpha_i}) \quad (1 \leq i \leq r) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑭$$

But $(x, x^k - 1) = 1$, so by ⑭ $x \equiv 0$ or

$$x^{k-1} \equiv 1 \quad (mod\ \ p_i^{\alpha_i}). \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑮$$

In ⑮ we can write x, using the primitive root g_i in the form $x \equiv g_i^{\beta_i}\ (mod\ p_i^{\alpha_i})$, where $0 \leq \beta_i < \phi(p_i^{\alpha_i})$. Substituting in ⑮, we get $g_i^{(k-1)\beta_i} \equiv 1 \equiv g_i^0\ (mod\ p_i^{\alpha_i})$. Hence $(k-1)\beta_i \equiv 0\ (mod\ \phi(p_i^{\alpha_i}))$, which means that $(k-1)\beta_i = d_i d_i' \beta_i$ is divisible by $\phi(p_i^{\alpha_i}) = d_i c_i$. Therefore $(d_i', c_i) = 1$ implies $c_i | \beta_i$, i.e., $\beta_i = c_i q_i$ for some q_i. Here $0 \leq q_i < d_i$ because of the bounds on β_i. Thus the solution of ⑭ are $x \equiv 0\ (mod\ p_i^{\alpha_i})$, $x \equiv g_i^{c_i q_i}\ (mod\ p_i^{\alpha_i})$, the number of which is $d_i + 1$, taking into account the possible values of q_i, and all the solutions are incongruent $(mod\ p_i^{\alpha_i})$. Thus we have

$$x \equiv G_1 \quad (mod\ \ p_1^{\alpha_1})$$
$$\cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots$$
$$x \equiv G_r \quad (mod\ \ p_r^{\alpha_r})$$

Thus $x P_i^{\phi(p_i^{\alpha_i})} \equiv G_i p_i^{\phi(p_i^{\alpha_i})} \quad (mod\ \ B)$. So

$$x \cdot \sum_{i=1}^{r} p_i^{\phi(p_i^{\alpha_i})} \equiv \sum_{i=1}^{r} G_i p_i^{\phi(p_i^{\alpha_i})} \qquad (mod\ \ B).$$

We must show for the proof of the theorem that

$$\sum_{i=1}^{r} p_i^{\phi(p_i^{\alpha_i})} \equiv 1 \qquad (mod\ \ B)$$

But that is obvious since $p_j^{\alpha_j} | p_i$ for $i \neq j$

by the definition of p_i and $p_j^{\alpha_j} | (p_j^{\phi(p_j^{\alpha_j})} - 1)$.

(**EXAMPLE**) Solve the diophantine equation

$$x_0+x_1 10^2+x_2 10^4+\cdots\cdots+x_n 10^{2n}=(x_0+x_1+\cdots\cdots+x_n)^4.$$

solution : First solve the congruence $x^4 \equiv x \ (mod\ 99)$

In our case $B=99=3^2\cdot 11$ so $p_1^{\alpha_1}=3^2$, $\phi(3^2)=6$, $g_1=2$, $d_1=(3,6)=3$, $c_1=2$, $p_1=11$, $G_1=0$ or $2^{2q_1}(q_1=0, 1,$ or $2)$; and $p_2^{\alpha_2}=11$, $\phi(11)=10$, $g_2=2$, $d_2=(3, 10)=1$, $c_2=10$, $p_2=9$, $G_2=0$ or $2^0=1$. Thus one of the solution of congruence is

$$x \equiv 9^{10} \equiv 45 \quad (mod\ 99)$$

Every number of the form $x=x_0+x_1+\cdots\cdots+x_n=45+99t$ $(t=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ determines an $(n, x_0, \cdots\cdots, x_n)$ integer solution of our example. For example, $x=45$

$$45^4-45=4100580=4\cdot 999999+10\cdot 9999+6\cdot 99,$$

and so $n=3$, $x_3=4$, $x_2=10$, $x_1=6$, $x_0=25$.

Thus $45^4=4100625=(4+10+06+25)^4$.

(9) $2^a-2^b \mid n^a-n^b$ for all n (Selfridge - Sun Qi-Zhang Mingzhi's equation)

Recently Selfridge asked for what a and b does 2^a-2^b divide n^a-n^b for all n ? In 1985, Sun Qi und Zhang Mingzhi solve the problem completely.

Trivially, $(1, 0)$ is our solution. So we can suppose $1 \leq b < a$ and $a-b=c$. We have 6 Lemmas.

LEMMA 15 Suppose (a, b) is a solution, then $2 \mid c$ except

$$(a, b)=(2, 1).$$

proof : If $b \geq 2$, put $n=3$, then $2^b \mid 3^c-1$, and $3^c \equiv 1 \ (mod\ 4)$, so that $2 \mid c$. If $b=1$ and c is odd, $c>1$, we have $2^c-1 \equiv 7 \ (mod\ 12)$ and 2^c-1 has a prime factor $p \not\equiv \pm 1 \ (mod\ 12)$, then 3 is a quadratic nonresidue of p and $p \oplus 3^c-1$, therefore our relation $2^a-2^b \mid n^a-n^b$ is not true $n=3$.

LEMMA 16 Suppose $2<b<a$ and $2^a-2^b = 2^b p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_s^{\alpha_s}$ where p_i are distinct odd primes, the a necessary and sufficient condition for (a, b) to be a solution is

(i) $2^{b-2} \mid c$

(ii) $\varphi(p_i^{\alpha_i}) \mid c$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, s)$, where $\varphi(t)$ is Euler's function

(iii) $b \geq \max\limits_{1 \leq i \leq s} (\alpha_i)$

proof : Suppose (a, b) is a solution, put $n=5$, then $5^c \equiv 1 \pmod{2^b}$. Since the exponent to which 5 belongs $(mod\ 2^b)$ is 2^{b-2}, so that $2^{b-2} \mid c$.

Let n be a primitive root of $p_i^{\alpha_i}$, since $p_i^{\alpha_i} \mid n^b(n^c-1)$ and $n^c \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, so that $\varphi(p_i^{\alpha_i}) \mid c$.

Put $n=p_i$, since $p_i^{\alpha_i} \mid p_i^b(p_i^b-1)$, it follows that $b \geq \alpha_i$.

Conversely, suppose that the conditions (i), (ii) and (iii) are satisfied and n is an arbitrary integer.

If $2 \mid n$, then $2^b \mid n^a - n^b$. If $2 \mid n$, then, from (i), we have $n^c \equiv 1 \pmod{2^b}$ and $2^b \mid n^a-n^b$.

If $p_i \mid n$, then $p_i^{\alpha_i} \mid n^a-n^b$ from (iii). If $p_i \mid n$, then $n^c \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ and $p_i^{\alpha_i} \mid n^a - n^b$ from (ii).

Hence, we have $2^a-2^b \mid n^a-n^b$ for arbitrary n.

Similarly, we can prove ;

LEMMA 17 For $b=1, 2$, (a, b) is a solution if and only if the conditions (ii), (iii) above are satisfied.

If (a, b) is a solution, $s \leq d\left(\frac{c}{2}\right)$ where s is the number of distinct prime factors of 2^c-1 and $d(k)$ is the number of divisor of k.

LEMMA 18 If $8 \mid c$, then (a, b) is not a solution.

proof : Suppose (a, b) is a solution, but $c = 2^t u$, $t \geq 3$ $2 \nmid u$.

Since $2^{2^t u} - 1 = (2^{2^t} - 1) \cdot f = f \cdot \prod_{i=1}^{t-1} (2^{2^i} + 1)$, and every prime factor of $2^{2^{t-1}} + 1$ is of the form $k 2^{t+1} + 1$, so we have $q \mid 2^c - 1$, where q is a prime factor of $2^{2^{t-1}} + 1$. From lemma 16, 17, we get $\varphi(q) \mid c$, $2^{t+1} \mid 2^t u$ which is impossible.

LEMMA 19 Suppose $c > 2$, if c satisfies $2^{\frac{c}{d(\frac{c}{2})}} > 3 \cdot \frac{c}{2}$, then (a, b) is not a solution.

proof : Put $M = p_j^{\alpha_j} = \max_{1 \leq i \leq s} (p_i^{\alpha_i})$. If $s = 1$, then $M = 2^c - 1$.

Since $\varphi(M) = M \cdot (1 - \frac{1}{p_i}) \geq \frac{2}{3} M = 2(2^c - 1) \cdot \frac{1}{3} > c$ when $c > 2$, and this contradicts (ii), so that (a, b) is not a solution when $c > 2$ and $s = 1$. If $s > 1$, then $M^s > 2^c - 1$. Since M^s is odd, so $M^s > 2^c$. By inequality $s \leq d(\frac{c}{2})$ we have $\varphi(M) \geq \frac{2}{3} M > \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{c}{s}} \geq \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{c}{d(\frac{c}{2})}}$. If $2^{\frac{c}{d(\frac{c}{2})}} > 3 \cdot \frac{c}{2}$, then $\varphi(M) > c$. It is impossible.

If $p \geq 5$ is prime, then (a, b) is not a solution when $c = 2p$.

LEMMA 20 For all positive integer n we have

$$d(n) \leq \sqrt{3}\, n$$

proof : Assume that $n = \prod_{i=1}^{r} q_i^{\beta_i}$ to be the standard decomposition of n, then $\frac{d(n)}{\sqrt{n}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{(\beta_i + 1)}{q_i^{\frac{\beta_i}{2}}}$. Put $f(\beta) = \frac{\beta + 1}{q^{\frac{\beta}{2}}}$, by differentiation, it is easy to verify that $f(\beta)$ is decreasing in the interval $[1, \infty)$ if $q > e$, and $f(\beta)$ is decreasing in the interval $[2, \infty)$ if $q > e^{\frac{2}{3}}$, so that we have

$$\frac{\beta_i + 1}{q_i^{\frac{\beta_i}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{for} \quad q_i \geq 3$$

$$\frac{\beta_i + 1}{q_i^{\frac{\beta_i}{2}}} \leq 1 \qquad \text{for} \quad q_i \geq 5$$

and $\dfrac{\beta_i + 1}{2^{\frac{\beta_i}{2}}} \leq \dfrac{3}{2}$. Therefore $d(n)/\sqrt{n} \leq \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

By the way, the coefficient $\sqrt{3}$ can not be reduced further, since $d(12) = \sqrt{3 \cdot 12}$.

THEOREM 16 For $0 \leq b < a$, our solutions are

$(a, b) =$ (1, 0), (2, 1) ; (3, 1), (4, 2), (5, 3) ; (5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4) ; (8, 2), (9, 3) ; (14, 2), (15, 3), (16, 4).

proof : If $a \neq 1$, $(a, 0)$ is not a solution by putting $n = 2^a - 1$.

Put $g(c) = 2^{\sqrt{2c/3}} - 3c/2$, by differentiation, it is easy to verify $g(c) \geq g(66) > 0$ for $c \geq 66$.

From lemma 20, $2^{c/d(\frac{c}{2})} \geq 2^{\sqrt{2c/3}}$. By lemma 19, it follows that (a, b) is not a solution when $2^{\sqrt{2c/3}} > 3c/2$. So (a, b) is not a solution for $c \geq 66$. Therefore we need only to consider the cases when $2 \leq c \leq 64$.

We can reject $c = 64, 56, 48, 40, 32, 24, 16, 8$ from lemma 18 and $c = 5p = 62, 58, 46, 38, 34, 26, 22, 14, 10$.

By straightforward calculation, we have that the equation $2^{c/d(\frac{c}{2})} > \frac{3}{2}c$ is true for $c = 60, 54, 52, 50, 44, 42, 36, 30, 28, 20, 18$ and all of them can be rejected. Hence there remain $c = 12, 6, 4, 2$. In these cases b can not exceed 4, 3, 4, 3 respectively.

For $c = 12$ and $b = 1$, since $2^{12} - 1 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, the condition (iii) in lemma 17 is not satisfied, so that it can be rejected. Similary, the case $c=6$, $b=1$ also can be rejected, since $2^6-1=3^2\cdot 7$. It is easy to verify that for the other twelve cases the conditions in lemma 16, 17 are satisfied.

Adding (1, 0), (2, 1). we obtain all solutions.

3. Summary

We have consider some Diophantine equations e.g., linea typed equations, Pell's equations, Walker's equations, Markov's equations and so on. But there are another many famous equations. e.g., Thue equations, Modell's equations, Catalan's equations and exponential or generaltypes and so on.

How to solve the Diophantine equations ? But regretfully, there is no general method.

Hilbert proposed the famous problems in his 1900 address before the International Congress of Mathematicians.

Hilbert's tenth problem is to give a computing algorithm which will tell of a given polynomial Diophantine equation with integer coefficients whether or not it has a solution in integers. Recently, Matiyasevič proved that there is no such algorithm. It is very interesting.

And Martin Davis, Yuri Matiyasevič, Hilary Putnam and Julia Robinson have proven that every recursively enumerable set is Diophantine. So, the set of prime numbers is Diophantine. From this, it follows that the set of prime numbers is representable by a polynomial formula.

Here is such an polynomial.

THEOREM The set of prime numbers is identical with the set of positive values taken on by the polynomial.

$$
\begin{aligned}
&(k+2)\{1-[wz+h+j-q]^2-[(gk+2g+k+1)\cdot(h+j)+h-z]^2\\
&-[2n+p+q+z-e]^2-[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2]^2\\
&-[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2]^2-[(a^2-1)y^2+1-x^2]^2\\
&-[16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2]^2-[((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1\\
&-(x+cu)^2]^2-[n+l+v-y]^2-[(a^2-1)l^2+1-m^2]^2\\
&-[ai+k+1-l-i]^2-[p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m]^2\\
&-[q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x]^2\\
&-[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm]^2\}
\end{aligned}
$$

4. References

〔1〕 Burton, David M., Elementary Number Theory, Allyn and Bacon.

〔2〕 Weil, André, Number Theory, Birkhauser, Boston, 1984.

〔3〕 Hua Loo Keng, Introduction to Number Theory, Springer-Verlag.

〔4〕 Sun Qi, *Pairs where 2^a-2^b divides n^a-n^b for all n*, Proc. American Math. Soc., Vol. 93, No. 2. 1985, pp.218 ~ 220.

〔5〕 Yong-moo, Kim, $x^n+y^n=z^n$, 數(Numbers) Vol.6, 1985. pp.44 ~ 56. (published by department of mathematics, Korea, Univ.)

〔6〕 Davis, Martin, *Hilbert's tenth problem is unsolvable*, American Math. Monthly, Vol. 80, 1975, pp.233 ~ 269.

〔7〕 Sato, Daihachiro, *Diophantine representation of the set of prime numbers* American Math. Monthly, Vol. 83,1976, pp.449 ~ 464.

〔8〕 Walker, D. T., *On the diophantine equation $mx^2-ny^2=\pm1$*, American Math. Monthly, Vol.74, 1967, pp.504 ~ 513.

〔9〕 Koblitz, Neal, Number Theory Related to Fermat's Last Theorem, Birkhäuser, Boston, 1982.

비선형 방정식의 해법

김철홍 (84)

Computer 의 발달은 이를 이용하여 문제를 보다 효율적으로 해결하는 방법을 연구하는 수치해석 이라는 학문을 탄생시켰고, 수치해석의 발달로 우리는 상당히 많은 문제를 Computer 를 이용해서 풀수있게 되었다.

여기서는 우리가 흔하게 접할 수 있는 문제인 $f(x)=0$ 과 같은 방정식의 근을 구하는 방법중 일부를 알아보고자 한다.

$f(x) = x^3 - x - 1$ 의 근을 구하는 방법을 예로 들어보자 $f(x)$ 는 연속 함수이고 $f(1)=-1<0<5=f(2)$ 이므로 $f(x)$ 는 최소한 한개의 근을 구간 〔1,2〕 에 갖고 있다. 또한 Roll 의 정리에 의해 구간 〔1,2〕에서는 단, 하나의 근을 갖고 있음을 알 수 있다.

그 근을 ξ 라 하면, 구간의 중간을 택하여

$$\xi \approx 1.5, \quad \text{절대오차} \leq 0.5$$

라 놓을 수 있다.

다시 $f(1.5) = 0.875 > 0 > -1 = f(1)$ 이 되어 $\xi \in [1, 1.5]$ 임을 알수 있다.

위의 방법을 계속하여

$$\xi = 1.25 \qquad \text{절대오차} \leq 0.25$$

$$f(1.25) = -0.296 \cdots < 0 < 0.875 = f(1.5)$$

$$\therefore \quad \xi \in [1.25, 1.5]$$

이와 같이 $f(x) = 0$ 의 근을 찾기 위해 구간을 둘로 나누어 가며 크기를 축소시켜 나가는 방법을 이분법(bisection method) 라 한다. 이 방법을 Algorithm 으로 나타내면 다음과 같다.

Algorithm 1: Bisection method Given a function $f(x)$ continuous on the interval $[a_0, b_0]$ and such that $f(a_0)f(b_0) \leq 0$.

For $n = 0, 1, 2, \ldots,$ until satisfied, do:
- Set $m = (a_n + b_n)/2$
- If $f(a_n)f(m) \leq 0$, set $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m$
- Otherwise, set $a_{n+1} = m$, $b_{n+1} = b_n$
- Then $f(x)$ has a zero in the interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

참고 : 여기서 until satisfied 단 말은 주어진 오차의 한계를 기준하여 판단한다는 뜻이다. 전자 계산기에서는 우리가 해석적으로 문제를 풀때와는 달리 항상 오차가 존재한다. 이 오차를 줄이는 문제는 수치해석에서 상당히 중요한 문제이다.

따라서, 위의 Algorithm 을 program 으로 옮길때는 오차의 한계를 주어 그 오차의 범위내에서 값을 찾을때 까지 수행 시

킨다.

이 Algorithm을 위의 문제에 적용시켜 20번째 과정을 보면

$a_0 = 1,\ b_0 = 2$ 부터 시작하여

$1.3247175 \cdots\cdots = a_{20} \le x_0 \le b_{20} = 1.3247184 \cdots\cdots$

$f(a_{20}) = -1{,}857 \times 10^{-6} < 0 < 2.209 \times 10^{-6} = f(b_{20})$

을 얻는다.

이분법은 아주 간단하고 확실한 방법이지만 수렴속도가 매우 느린것이 단점이기 때문에 보다 빠른 방법을 생각해 보자.

위식 $f(x) = x^3 - x - 1$에서 $f(1) = -1$, $f(2) = 5$이므로 $|f(1)|$이 $|f(2)|$보다 0에 더 가까운 것을 알 수 있다. 여기서 우리는 ξ가 2보다는 1에 가깝다고 생각할 수 있다.

그래서 구간 $[a, b]$의 중간치인 $\frac{a+b}{2}$를 택하기 보다는

가중 평균치

$$w = \frac{|f(b)|\cdot a + |f(a)|\cdot b}{|f(a)| + |f(b)|} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

에서 $f(x)$의 값을 검토한다. 특히 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 반대이므로 (1) 식을

$$w = \frac{f(b)\cdot a - f(a)\cdot b}{f(b) - f(a)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

로 간단히 할 수 있다.

식 (2)를 이분법에 이용하여 $f(x) = x^3 - x - 1$을 풀면

$$w = \frac{f(2)\cdot 1 - f(1)\cdot 2}{f(2) - f(1)} = \frac{5+2}{6} = 1.1666$$

$\cdots\cdots$ 이고

$f(w) = -0.578703 \cdots\cdots < 0 < 5 = f(2)$

$\therefore\ \xi \in [1.1666\cdots\cdots, 2]$

이와 같은 과정을 되풀이하는 방법을 가위치법 (false-position or regulan falsi)라 한다.

Algorithm 2: Regula falsi Given a function $f(x)$ continuous on the interval $[a_0, b_0]$ and such that $f(a_0)f(b_0) < 0$.

For $n = 0, 1, 2, \ldots,$ until satisfied, do:
- Calculate $w = [f(b_n)a_n - f(a_n)b_n]/[f(b_n) - f(a_n)]$
- If $f(a_n)f(w) \le 0$, set $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = w$
- Otherwise, set $a_{n+1} = w$, $b_{n+1} = b_n$

이 Algorithm을 적용하면 16번째 단계에서 다음을 얻는다.

$1.324714 \cdots = a_{16} \le x_0 \le b_{16} = 2$

$f(a_{16}) = -1.95 \cdots \times 10^{-6} < 0 < 5 = f(b_{16})$

여기서 가위치법은 ξ를 이분법 보다는 빨리 찾을 수 있지만 ξ가 존재하는 구간을 작게하는데는 실패함을 알 수 있다.

그 이유는 다음 그림. 1을 보면 알 수 있다.

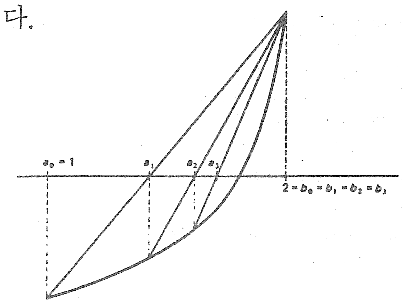


Figure 1 Regula falsi.

가중 평균치 $w = \dfrac{f(b_n)\cdot a_n - f(a_n)\cdot b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$ 은 두점 $(a_n, f(a_n))$ 과 $(b_n, f(b_n))$ 을 통과하는 직선상에 있는 점이다. 이 직선은 $f(x)$ 의 할선이고, 우리의 예에서 $f(x)$ 는 위로 오목하고 증가 함수이므로 할선은 항상 $f(x)$ 의 위에 있게 된다.

따라서 w 는 ξ 의 왼쪽에 놓이게 된다.

가위치법의 Algorithm은 몇가지 방법으로 개선할 수 있다.

그 한가지 방법이 수정한 가위치법(modified regula falsi)으로 할선을 기울기보다 작게 만드는데 w 가 ξ 의 반대 방향의 x 축에 올때까지 반복한다. 이는 그림 2에 잘 나타나 있다.

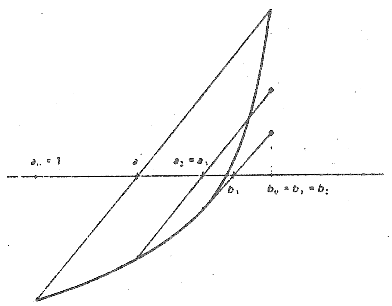


Figure · 2 Modified regula falsi.

Algorithm 3: Modified regula falsi Given $f(x)$ continuous on $[a_0, b_0]$ and such that $f(a_0)f(b_0) < 0$.

Set $F = f(a_0)$, $G = f(b_0)$, $w_0 = a_0$

For $n = 0, 1, 2, \ldots$, until satisfied, do:

- Calculate $w_{n+1} = (Ga_n - Fb_n)/(G - F)$
- If $f(a_n)f(w_{n+1}) \le 0$, set $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = w_{n+1}$, $G = f(w_{n+1})$
  - If also $f(w_n)f(w_{n+1}) > 0$, set $F = F/2$
- Otherwise, set $a_{n+1} = w_{n+1}$, $F = f(w_{n+1})$, $b_{n+1} = b_n$
  - If also $f(w_n)f(w_{n+1}) > 0$, set $G = G/2$
- Then $f(x)$ has a zero in the interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

수정한 가위치법을 위의 예에 적용 시켜 보면 $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ 일때 6단계 이후에 다음을 얻는다.

$$1.32471795\cdots\cdots = a_6 \le x_0 \le b_6 = 1.32471796\ \cdots\cdots$$

$$f(a_6) = -1.736 \times 10^{-8} < 0 < 1.730 \times 10^{-8} = f(b_6)$$

다음에 가위치법의 수정방법중 나인 정할법(secant method) 소개하고,이로부터 Newton의 반복법을 유도해 보자.

Algorithm 4: Secant method Given a function $f(x)$ and two points x_{-1}, x_0.

For $n = 0, 1, 2, \ldots$, until satisfied, do:

- Calculate $x_{n+1} = [f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n]/[f(x_n) - f(x_{n-1})]$

이 방법을 $x_{-1} = 1$, $x_0 = 2$ 라 하여 계산해 보면 6단계 이후 다음의 결과를 얻는다.

$$x_6 = 1.3247179\cdots\cdots,$$

$$f(x_6) = 3.458 \times 10^{-8}$$

정할법은 수렴속도가 매우 빠른 반면 $f(x_n)$ 과 $f(x_{n-1})$ 이 같은 부호가 될때

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdots\ (3)$$

의 오차가 매우 커지게 되고 극단적인 경우 $f(x_n) = f(x_{n-1})$ 이면 계산은 불가능해진다.

따라서 (3)식을

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdots\cdots\ (4)$$

로 바꾸어 사용하기도 한다.

다시 4) 식을 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)$

$$\frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$ 로 바꾸어 쓸수 있다.

여기서 $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ 은 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 과 $(x_n, f(x_n))$ 을 통과하는 기울기이며 또한 중간치 정리에 의해서 $f(x)$ 가 미분 가능할때 x_{n-1} 과 x_n 의 어떤 중간점에서 $f'(x)$ 와 일치한다는 것을 알수 있다.

따라서, $f'(x)$ 를 계산할 수 있을때는 x_n 과 x_{n-1} 가까이 있는 점에 대한 $f'(x)$ 값을 이 비율 대신 놓을 수 있다.

$\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ 대신 x_n 에서의 접선의 기울기를 놓으면 Newton의 반복식

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ 을 얻게 된다.

Algorithm 5: Newton's method Given $f(x)$ continuously differentiable and a point x_0.

For $n = 0, 1, 2, \ldots,$ until satisfied, do:
Calculate $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

이 Algorithm을 $x_0 = 1$ 이라하고 앞의 예에 적용해 보면 4번째 단계에서 $x_4 = 1.3247181 \cdots\cdots$, $f(x_4) = 9.24 \times 10^{-7}$ 을 얻는다.

예제 : 함수 $f(x) = x - 0.2 \sin x - 0.5$는 $f(0.5)\ f(1.0) < 0$ 이고 $f'(x)$ 는 $[0.5, 1]$ 에서 0이 되지 않으므로 $x_0 = 0.5$ $x_1 = 1.0$ 사이에서 단, 하나의 근을 갖는다. 이를 위의 여러가지 Algorithm에 의해 계산한 결과는 다음과 같다.

n	Algorithm 3.1 x_n	e_n	Algorithm 3.3 x_n	e_n	Algorithm 3.4 x_n	Algorithm 3.5 x_n
−1					1.	
0	0.75	$3 \cdot 10^{-1}$	0.75	$3 \cdot 10^{-1}$	0.5	0.5
1	0.625	$2 \cdot 10^{-1}$	0.80606124	$2 \cdot 10^{-1}$	0.61212248	0.61629718
2	0.5625	$6 \cdot 10^{-2}$	0.61534080	$3 \cdot 10^{-3}$	0.61549349	0.61546820
3	0.59375	$3 \cdot 10^{-2}$	0.61701328	$2 \cdot 10^{-3}$	0.61546816	0.61546816
4	0.609375	$2 \cdot 10^{-2}$	0.61701363	$2 \cdot 10^{-3}$		
5	0.6171875	$8 \cdot 10^{-3}$	0.61546816	0		
6	0.61328125	$4 \cdot 10^{-3}$				
…	…………	……				
10	0.61547852	$4 \cdot 10^{-4}$				
…	…………	……				
19	0.61546850	$5 \cdot 10^{-7}$				

Newton의 반복법은 다음에 설명할 고정점 반복법의 특수한 예가 된다.

$g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 라 놓으면 Newton의 반복식을 $x_{n+1} = g(x_n)$ 라 쓸수 있다.

만약 수열 $x_1, x_2, \cdots\cdots$가 ξ에 수렴하고 $g(x)$ 가 연속이면

$$\begin{aligned}\xi &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= g(\lim_{x\to\infty} x_n) = g(\xi)\end{aligned}$$

가 된다.

즉 $\xi = g(\xi)$ 가 되어 ξ는 $g(x)$ 의 고정점이 된다.

여기서 우리는 방정식 $f(x) = 0$ 에 대해서 반복식 $g(x)$ 가 있다면 그 반복식은 $f(x) = 0$ 가 되는 $g(x)$ 의 고정점을

갖는다. 즉 수열 $x_1, x_2 \cdots\cdots$ 를 계산할 수 있는 반복식

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0.1.2 \cdots\cdots$$

에 의해서 $x_1, x_2, \cdots\cdots$이 수렴할 때 그 극한치가 $f(x) = 0$의 근이 된다.

위에서 고정점 반복법에 의해서 방정식 $f(x) = 0$의 근을 구할 수 있다는설명을 하였다.

이 방법은 $f(x) = 0$에서 유도된 방정식 $x = g(x)$의 임의의 근 즉 $g(x)$의 고정점이 $f(x) = 0$의 근이 된다는 것이다.

예를 들어 $f(x) = x^2 - x - 2$에서 선택 가능한 반복식은 다음과 같다.

ㄱ) $g(x) = x^2 - 2$

ㄴ) $g(x) = \sqrt{2 + x}$

ㄷ) $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

ㄹ) $g(x) = x - \dfrac{x^2 - x - 2}{m}$

이와 같은 $g(x)$를 이용하여 다음과 같이 근을 구한다.

Algorithm 3.6: Fixed-point iteration Given an iteration function $g(x)$ and a starting point x_0

For $n = 0, 1, 2, \ldots$, until satisfied, do:
Calculate $x_{n+1} = g(x_n)$

이 Algorithm을 이용하기 위해서 다음을 증명하여야 한다.

i) 초기치에 대해서 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 를 계속 계산할 수 있어야 한다.

ii) 수열 $x_1, x_2, \cdots\cdots$가 ξ에 수렴해야 한다.

iii) ξ는 $g(x)$의 고정점 즉, $\xi = g(\xi)$가 된다.

위의 세가지를 분명히 제한하기 위해 다음 가정을 고정점 반복법의 조건으로 제시한다.

가정 1. $I = [a,b]$에서 모든 $x \in I$에 를해 $g(x)$가 정의 되고 $g(x) \in I$이다.

즉 $g : I \to I$ 이다.

가정 2. 반복함수 $g(x)$가 $I = [a,b]$에서 미분가능하고 다음과 같은 음이 아닌 상수 $K < 1$가 존재한다. 모든 $x \in I$에 대해 $|g'(x)| \le K$

정리 1. $g(x)$를 가정 1과 가정 2를 만족하는 반복함수라 할때 $g(x)$가 I에서 단하나의 고정점 ξ를 갖는다. 그리고 $x_0 \in I$에서 시작하여 Algorithm 6에 의해 생성되는 수열 $x_1, x_2, \cdots\cdots$는 ξ에 수렴한다.

증명

i) $\exists \xi$ $s.t.$ $g(\xi) = \xi$, $\xi \in [a.b]$ /

$g(a) = a$이거나 $g(b) = b$이면 명백하다. 따라서 $g(a) \neq a$이고 $g(b) \neq b$라 하면 가정 1에 의해 $g(a) > a$, $g(b) < b$ 이다. 함수 $h(x) = g(x) - x$라 정의하면 $h(a) > 0$, $h(b) < 0$이며, 가정 2에 의해 $g(x)$가 연속이므로 $h(x)$로 연속이다.

$\therefore$ 연속함수 중간치 정리에 의해서 $h(x)$

근이 I에 존재한다.

$$\therefore \quad 0 = h(\xi) = g(\xi) - \xi \Rightarrow \xi = g(\xi)$$

ii) $x_0 \in \mathrm{I}$ 이면 모든 $x_1, x_2, \cdots\cdots$는 I 안에서 생성된다. 여기서 n번째 반복 과정에서의 오차를

$$e_n = \xi - x_n \qquad n = 0,1,2,\cdots\cdots$$

라하면 $\xi = g(\xi)$이고 $x_n = g(x_{n-1})$이므로

$$e_n = \xi - x_n = g(\xi) - g(x_{n-1})$$
$$= g'(\eta_n) e_{n-1}$$

$\eta_n \in [\xi, x_{n-1}]$ (by mean-value Th.)

가정 2에 의해 $|e_n| \leq \mathrm{K}\,|e_{n-1}|$ 이고

n에 관한 귀납법에 의해

$|e_n| \leq \mathrm{K}\,|e_{n-1}| \leq \mathrm{K}^2\,|e_{n-2}| \leq \cdots$

$\cdots \leq \mathrm{K}^n\,|e_0|$ 이 다.

$0 \leq \mathrm{K} \leq 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{K}^n = 0$이고 e_0에 관계없이

$$\lim_{n\to\infty} |e_n| = \lim_{n\to\infty} \mathrm{K}^n |e_0| = 0$$

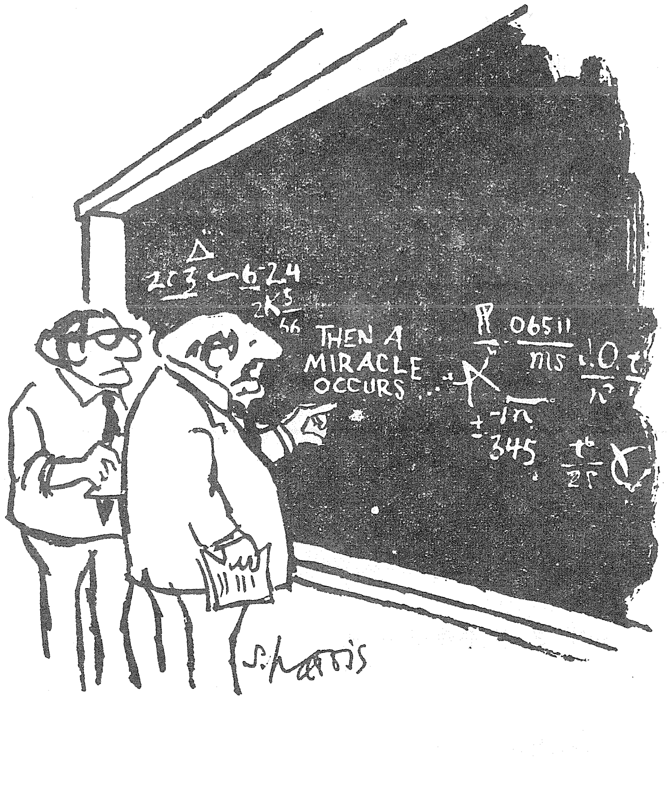
이는 $x_1, x_2, \cdots\cdots$가 ξ에 수렴함을 말해준다.

지금까지 우리는 방정식의 근을 구하는 여러가지 방법을 알아 보았고 수렴속도 면에서 이분법이 가장 느리고 Newton의 방법이 가장 빠름을 알아 보았다. 하지만, Newton의 반복법이 이분법 보다 더 우수하다고는 할 수 없다. 왜냐하면 이분법이 보다 수렴성의 보장이 좋기 때문이다. 따라서 문제의 성격에 따라 위의 여러가지 방법중 하나를 택하여야 한다.

지금까지 설명한 방법 외에도 고정점 반복법의 수렴속도를 빠르게 하는법, 다항식의 근을 구하는 법등 여러가지 방법이 있지만 여기서는 생략하기로 하겠다.

특별기획

□전국 대학생 수학경시대회 문제풀이



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

전국 대학생 수학경시대회 문제풀이

편집부

지금까지 5회에 걸쳐 전국수학경시대회가 열렸다. 최초로는 1982 년에 서울대학교에서 열렸으며, 올해의 문제는 본교의 우무하 교수님을 비롯하여 5개대학 교수진이 출제하였다.

앞으로 계속될 경시대회에 많은 학우들의 참석을 기대하면서 본 편집부는 지난 5회에 걸친 문제를 다루어 봄으로써 그간의 문제를 살펴보기로 하였다.

그리하여, 몇몇 학우의 도움을 받아 학회지에 실으니, 여러분의 좋은 참고가 되길 바랍니다.

제 1 회

(1차)

1. 다음 부등식이 성립함을 보여라.

(1) $x^y y^x \leq x^x y^y$ (단, x, y는 임의의 양의 실수이다.)

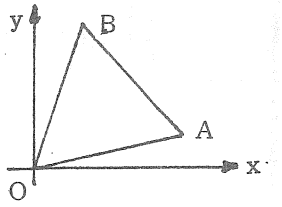
(2) $\pi^e < e^\pi$

풀이

(1) $\log(x^x y^y) - \log(x^y y^x) = (x-y)(\log x - \log y)$ 이고 $\log x$는 증가함수이므로 $x-y$와 $\log x - \log y$의 부호는 일치한다. 따라서,
$(\log x - \log y)(x-y) \geq 0$ 이고 즉, $\log(x^x y^y) \geq \log(x^y y^x)$ 이다. 따라서, $x^x y^y \geq x^y y^x$ 이며 등호는 $x=y$일때 성립한다.

(2) $f(x) = x^e e^{-x}$라 하면 $f'(x) = (e-x)x^{e-1}e^{-x}$이고 $0 < x < e$이면 $f'(x) > 0$, $e < x$이면 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 $x=e$ 일때 최대이고 최대값은 $f(e) = 1$이다. 따라서, $x^e e^{-x} \leq 1$ 즉, $x^e \leq e^x$ 이며 등호는 $x=e$ 일 때만 성립한다. 따라서, $x=\pi$일 때는 $\pi^e < e^\pi$ 이다.

2. 옆의 그림과 같이 주어진 정 3 각형 OAB의 세변의 기울기를 각각 m_1, m_2, m_3 라 할때 $(m_1+m_2+m_3)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)$의 값을 구해라. 단, 세 변은 모두 좌표축에 평행 하지는 않다.



풀이

$\angle x0A=\theta$라 하면 $m_1=\tan\theta,\ m_2=\tan(\theta+120°)=\dfrac{m_1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}m_1}$,

$m_3=\tan(\theta+60°)=\dfrac{m_1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}m_1}$. 따라서

$$m_1+m_2+m_3=\frac{3m_1(3-m_1^2)}{1-3m_1^2},\quad \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{3(1-3m_1^2)}{m_1(3-m_1^2)}$$

즉, $(m_1+m_2+m_3)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)=9$이다.

3. $A=\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots\cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$라 하자. 단, a_i, b_i 들은 실수이고, 모든 b_i 는 양수이다. 이 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$(A\text{원소의 최소값}) \leq \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n} \leq (A\text{원소의 최대값})$$

풀이

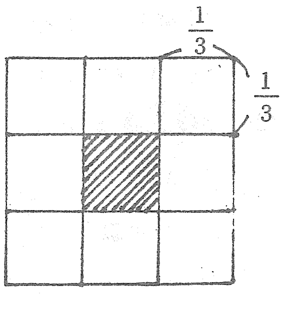
$M=\max\limits_{1\leq i\leq n}\dfrac{a_i}{b_i}$, $m=\min\limits_{1\leq i\leq n}\dfrac{a_i}{b_i}$ 라 놓으면, $m\leq\dfrac{a_i}{b_i}\leq M\ (i=1,2,\cdots,n)$

이고 $b_i>0$ 이므로 $mb_i\leq a_i\leq Mb_i$ 이다. 따라서

$$m\sum_{i=1}^{n}b_i\leq\sum_{i=1}^{n}a_i\leq M\sum_{i=1}^{n}b_i,\quad \Sigma b_i>0 \text{ 이므로}$$

$$m\leq\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}\leq M\text{이고 등호는 }\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\text{일 때이다.}$$

4. 변의 길이가 1인 정 4 각형이 있다. 이것을 옆 그림과 같이 9등분 하여 중앙의 정 4 각형을 제거한다. 나머지 각 정 4 각형을 다시 위와 같이 9등분하여 중앙의 정 4 각형을 제거한다.



(1) 이 과정을 n번 반복할 때 변의 길이가 $\frac{1}{3^n}$ 이 되는 정 4 각형은 모두 몇 개 남는가?

(2) 이 과정을 무한번 반복하였을 때 제거된 정 4 각형의 넓이의 합을 구해라.

풀이

(1) 첫 시행에서 정사각형은 8개가 남고 두번째 시행에서 각 사각형마다 8개의 사각형이 남으므로 총 8^2개가 남는다. 따라서 n번 시행 후에는 8^n개가 남는다.

(2) n번 반복해서 제거된 정사각형의 면적의 합은

$$1-8^n\left(\frac{1}{3^n}\right)^2=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n. \text{ 따라서 } \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right\}=1 \text{ 이다.}$$

5. n이 양의 정수일 때 함수 $f(x)=(x^2-x)^n$의 n차 도함수 $f^{(n)}(x)$에 대하여 방정식 $f^{(n)}(x)=0$은 0과 1 사이에서 n의 서로 다른 실근을 갖는것을 보여라.

5′(2분야). 개구간 (0, 1)에서 함수 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$이 다음과 같이 급수 전개 되었다고 할 때 a_1, a_2의 값을 구해라.

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e(1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)$$

풀이

$f'(x)=n(2x-1)(x^2-x)^{n-1}=g_1(x)(x^2-x)^{n-1}$에서 $g_1(x)$는 1차식이다.

$f^{(k)}(x)=g_k(x)(x^2-x)^{n-k}$ $(k=1, \cdots, n-1)$이라면

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \{g'_k(x)(x^2-x)+(n-k)(2x-1)g_k(x)\}(x^2-x)^{n-(k+1)} \\ &= g_{k+1}(x)(x^2-x)^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

이어서 $g_{k+1}(x)$는 $g_k(x)$보다 1차가 높다. 따라서, 수학적 귀납법에 의해 $\deg g_k=k$이다. 먼저 $f(0)=f(1)=0$이므로 Rolle의 정리에 의해 $f'(r)=0$, $0<r<1$인 r이 존재하고 이 근은 $g_1(x)$의 근과 일치하며 $\deg g_1=1$이므로 이런 r은 1개 뿐이다. 다음 $f'(0)=f'(r)=f'(1)=0$이므로 $f''(t_1)=f''(t_2)=0$인 t_1, t_2가 $0<t_1<r<t_2<1$에서 존재한다. 한편 이는 $g_2(x)$의 근과 일치하며 $\deg g_2=2$이므로 이런 t_1, t_2는 이 두개 뿐이다. 이를 계속하면 우리는 $f^{(n)}(x)=0$은 0과 1 사이에서 서로다른 n개의 실근을 갖는다는 것을 증명할 수 있다.

5′ $(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp(\log(1+x)^{\frac{1}{x}})=\exp\left(\frac{1}{x}(\log(1+x))\right)$이고 $0<x<1$이므로

$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots$의 양변을 적분하여

$\log(1+x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\cdots$ 이고 따라서,

$\exp\left(\frac{1}{x}\log(1+x)\right) = e \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\cdots\right)$ 이다.

한편 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\cdots$ 이므로

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\cdots\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)x^2 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + \cdots\cdots.$$

따라서 $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + \cdots\cdots\right)$ 이고

$a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{11}{24}$ 이다.

(2차)

1. 항등적으로는 0이 아닌 실함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 세조건을 만족한다.
(a) $f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$
(b) $g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$
(c) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 이때,

(1) $f(x)$는 기함수, $g(x)$는 우함수임을 보여라.
(2) $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속임을 보여라.
(3) $g'(x) = -f(x)$ 임을 보여라.

풀이

(1) (a)에서 $x = y$라 하면 $f(0) = f(x)g(x) - g(x)f(x) = 0$. 즉 $f(0) = 0$.
(a)에서 $y = 0$라 하면 $f(x) = f(x)g(0) - g(x)f(0) = f(x)g(0)$.
$f(x)$가 항등적으로는 0이 아니므로 $g(0) = 1$이다.
(a)에서 $x = 0$이라 하면 $f(-y) = f(0)g(y) - g(0)f(y) = -f(y)$.
(b)에서 $x = 0$이라 하면 $g(-y) = g(0)g(y) + f(0)f(y) = g(y)$.
즉, $f(x)$는 기함수, $g(x)$는 우함수이다.

(2) (c)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ 이다.

(b)에서 $y = x$ 라 하면 $g(0) = \{g(x)\}^2 + \{f(x)\}^2 = 1$ 이고

$f(x)$는 $x = 0$ 에서 연속이므로 $g(x)$도 $x = 0$ 에서 연속이다.

따라서, $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 1$ 이다.

(a)에서 $y = -h$ 라 하면

$$f(x+h) = f(x)g(h) + g(x)f(h) \quad \text{따라서}$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x) \lim_{h \to 0} g(h) + g(x) \lim_{h \to 0} f(h) = f(x).$$

즉 $f(x)$는 모든 실수 x에 대해 연속이다.

(3) $g(0) = \{g(x)\}^2 + \{f(x)\}^2 = 1$ 을 x에 대해 미분하면 $2g'(x)g(x) + 2f'(x)f(x) = 0$. $x = 0$ 이라 하면 $g'(0) = 0$ 이다. 따라서

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ g(x) \frac{g(h) - g(0)}{h} - f(x) \frac{f(h)}{h} \right\}$$

$$= g(x)g'(0) - f(x) = -f(x).$$

2. 함수 $f(x) = q \cos x$ $(0 < q < 1)$에 대하여 다음을 보여라.

(1) 방정식 $f(x) = x$는 근을 갖는다.

(2) 이 근을 r, a_0 을 임의의 상수라 하자. $\{x_n\}$을 $x_1 = a_0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \geq 1)$인 수열이라 하면 수열 $\{x_n\}$은 r에 수렴한다.

풀이

(1) $g(x) = f(x) - x = q \cos x - x$라 하면 $q(0) = q > 0$, $q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$

이므로 중간치의 정리에 따라 $g(r) = f(r) - r = 0$, $\left(0 < r < \frac{\pi}{2}\right)$인 r이 적어도 하나 존재한다. 즉, $f(x) = x$는 적어도 한개의 근을 갖는다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $|x_{n+1} - r| = |f(x_n) - f(r)|$이고 평균치의 정리에 의하여 $f(x_n) - f(r) = (x_n - r) f'(t_n)$인 t_n이 x_n과 r 사이에 존재한다. 따라서

$$|x_{n+1} - r| = |f(x_n) - f(r)| = |x_n - r||f'(t_n)| = |x_n - r||q \sin t_n|$$
$$\leq q|x_n - r|.$$

이를 반복하면 $|x_{n+1} - r| \leq q^n |x_1 - r|$. $0 < q < 1$ 이므로

$\lim_{n \to \infty} |x_{n+1} - r| \leq \lim_{n \to \infty} q^n |x_1 - r| = 0$. 즉 $\lim_{n \to \infty} x_n = r$ 이다.

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ 을 구하여라.

3′ (2분야) 서로 다른 세 양수(정수) x, y, z 에 대하여 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$이 정수가 되는 모든 x, y, z 들의 값을 구하고 그 이유를 밝혀라.

풀이

$$\log \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{n}(\log n! - n \log n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log k - \log n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}.$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\log\dfrac{k}{n})\cdot\dfrac{1}{n} = \int_0^1 \log x\, dx$

$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \log x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(-1-\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon)$. 로피탈의 정리에 의해

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon\log\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = -1$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$ 이다.

3′ $x<y<z$ 라 하여도 일반성은 잃지 않는다. $1<2<3$ 이므로 $x\geq 1$, $y\geq 2$, $z\geq 3$ 이고 $\dfrac{1}{x}\leq 1$, $\dfrac{1}{y}\leq\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{z}\leq\dfrac{1}{3}$ 이어서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}<2$ 이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ 이어야 한다. $x=1$ 이면 해가 없으므로 $x>1$ 이라 하자. $x<y<z$ 이므로 $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}$이어서 $\dfrac{1}{x}<1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$, 즉 $1<x<3$ 이고 $x=2$ 이다.

이때 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ 이고 $\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$ 이어서

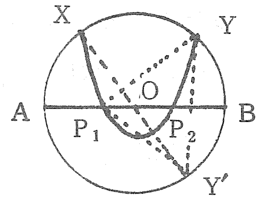
$2<y<4$ 이며 $y=3$ 이다. 따라서 $z=6$ 이다.

즉, $\{2, 3, 6\}=\{x, y, z\}$ 이다.

4. 주어진 원의 둘레 위에 서로 다른 두 점을 잡자. 이 두 점을 끝점으로 하는 선(곡선 또는 절선)을 그어 이 원의 면적을 2등분 할 때 선의 길이는 항상 이 원의 지름보다 작지 않음을 보여라.

풀이

X, Y를 잇는 주어진 선의 길이를 $d(X, Y)$라 하자.



(i) X, Y를 잇는 선이 지름일 때 ; $d(X, Y) = \overline{AB}$.

(ii) X, Y를 잇는 선이 호 $\widehat{XA}$, 지름 AB, 호 $\widehat{BY}$일때

$d(X, Y) = \widehat{XA} + \overline{AB} + \widehat{BY} > \overline{AB}$.

(iii) X, Y를 잇는 선이 지름 AB를 지날 때, 이 때는 지름 위의 두 점을 반드시 지난다. 그림에서

$$d(X, Y) \geq \overline{XP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2Y} \geq \overline{XP_1} + \overline{P_1Y} = \overline{XP_1} + \overline{P_1Y'} \geq \overline{XY'} = \overline{AB}.$$

따라서 $d(X, Y) \geq \overline{AB}$.

5. n이 양의 정수일 때 n의 모든 약수(1과 n도 포함)들의 곱을 $f(n)$으로 표시하자.

(1) n의 소인수 분해를 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ 라 할때 $f(n)$을 구해라.

(2) $f(m) = f(n)$ 이면 $m = n$ 임을 밝혀라.

5′ (2분야). 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\theta|}{n}$ 는 모든 θ에 대해 발신함을 보여라.

풀이

(1) 명백히 $f(n) = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_k^{\lambda_k}$ 꼴이어야 한다. $p_1, p_1^2, \cdots, p_1^{e_1}$을 인수로 갖는 n의 약수는 각각 $p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$의 약수의 갯수만큼 있고 이는 $(1+e_2)(1+e_3) \cdots\cdots (1+e_k)$이므로

$$p_1^{\lambda_1} = (p_1 \cdot p_1^2 \cdot \cdots \ p_1^{e_1})^{(1+e_2)(1+e_3)\cdots(1+e_k)} = p_1^{\frac{1}{2}e_1(1+e_1)(1+e_2)\cdots(1+e_k)}$$

여기서 $\lambda = \frac{1}{2}(1+e_1)(1+e_2)\cdots(1+e_k)$라면 $\lambda_1 = \lambda e_1$이다. 마찬가지로

$\lambda_i = \lambda e_i \ (i = 1, 2, \cdots, k)$이다. 따라서 $f(n) = n^{\lambda} = n^{\frac{1}{2}(1+e_1)(1+e_2)\cdots(1+e_k)}$

(2) $f(m) = f(n)$ 이므로 m과 n은 서로 다른 소인수를 가질 수 없으므로

$m = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_k^{f_k}$, $\mu = \frac{1}{2}(1+f_1)\cdots(1+f_k)$라면

$f(m) = p_1^{\mu_1 f_1} p_2^{\mu_2 f_2} \cdots p_k^{\mu_k f_k}$ 따라서 $\mu f_i = \lambda e_i \ (i = 1, \cdots, k)$

즉, $\frac{f_1}{e_1} = \frac{f_2}{e_2} = \cdots = \frac{f_k}{e_k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$ (유리수)이다.

한편 $(1+e_1)(1+e_2)\cdots(1+e_k)=\rho(1+f_1)(1+f_2)\cdots(1+f_k)$
$=\rho(1+\rho e_1)(1+\rho e_2)\cdots(1+\rho e_k)$ 이어서
$\rho>1$ 이면 $1+\rho e_1>1+e_1$ 이고 $\rho<1$ 이면 $1+\rho e_1<1+e_1$ 이어서 모순이다. 따라서 $\rho=1$ 이고 $f_i=e_i$ 이다. 즉 $m=n$ 이다.

5′ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\theta|}{n}$ 이 어떤 실수 θ에 대해 수렴한다고 하자. 그러면, 우리의 수열의 부분합인 짝수항의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n\theta|}{2n}$ 도 수렴하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 2n\theta|}{n}$ 가 수렴하고, 이 절대수렴급수에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n}$ 도 수렴한다. $\cos 2n\theta=2\cos^2 n\theta-1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos^2 n\theta-1}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ …… (ㄱ)
여기서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산하고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n}$ 는 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n}$ 도 발산하여야 한다. 한편 $|\cos n\theta|\geq\cos^2 n\theta$ 이므로 비교 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\theta|}{n}$ 가 발산한다. 이는 가정에 모순이므로 모든 θ에 대해 주어진 급수는 발산한다.

㈜ (ㄱ)은 정확히 $\lim_{N\to\infty}\left\{2\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos^2 n\theta}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right\}$ 이다.

제 2 회

(1차)

1. 다음 부등식을 증명하여라.
(1) $x^x\geq(x+1)^{x-1}$ 단, x는 $x\geq1$ 인 실수
(2) $(n!)^2>n^n$ 단, n은 $n\geq3$ 인 자연수

풀이

(1) $f(x)=\log x^x-\log(x+1)^{x-1}=x\log x-(x-1)\log(x+1)$이라 하면
$f'(x)=\log x-\log(x+1)+\frac{2}{x+1}$, $f''(x)=\frac{1-x}{x(x+1)^2}$.
$x>1$ 일 때 $f''(x)<0$ 이므로 $f'(x)$는 감소함수이다. 또,
$f'(1)=1-\log 2>0$ 이고 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ 이므로 $x\geq1$ 에서

$f'(x) > 0$ 이다. 따라서 $f(x)$는 $x \geq 1$ 에서 증가함수이고
$f(1) = 0$ 이므로 $f(x) \geq 0$ 즉, $x^x \geq (x+1)^{x-1}$ 이다.
(등호는 $x = 1$ 일때 성립)

(2) 이는 (1)을 이용하는 문제이다. $n = 3$ 이면 $(3!)^2 = 36 > 27 = 3^3$ 으로 주어진 부등식은 성립한다. $n = k$ 일 때 성립한다고 하자.

$$(k!)^2 > k^k \text{ 이므로 } \{(k+1)!\}^2 = (k!)^2(k+1)^2$$
$$> k^k(k+1)^2 > (k+1)^{k-1}(k+1)^2 = (k+1)^{k+1}.$$

따라서 $n \geq 3$ 인 모든 정수 n에 대해 $(n!)^2 > n^n$ 이다.

(별해) 이는 다음과 같이 독립적으로 증명할 수 있다.

$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdots\cdots ((n-1) \cdot 2) \cdot (n \cdot 1)$

이라고 쓰면,

$(k+1)(n-k) = k(n-k) + (n-k) > k \cdot 1 + (n-k) = n$

(이때, $n - k > 1$, $k > 0$)이고 따라서

첫 항의 곱과 말 항의 곱은 다른 것보다 작다. (여기서 $n \geq 3$이 적용)

따라서 $(n!)^2 > n \cdot n \cdot \cdots\cdots n = n^n$ 이다.

2. 다음 극한 값을 구해라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(c+\frac{1}{n})}{f(c)} \right\}^n$ 단, 함수 $f(x)$는 개구간 (a, b) 에서 미분가능하고, 이 구간 모든 점에서 $f(x) > 0$ 이며 $a < c < b$ 이다.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \right\}^n$

2′ (2분야). 네 변의 길이가 각각 a, b, c, d이고, 원에 외접하는 4각형 $ABCD$의 면적이 $\sqrt{abcd}$ 이면 이 4각형은 원에 내접함을 증명하여라.

풀이

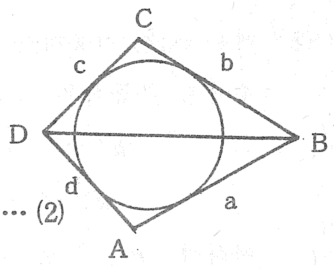
(1) $\dfrac{1}{n} = t$ 라 하자. $g(t) = \log \left\{ \dfrac{f(c+t)}{f(c)} \right\}^{\frac{1}{t}}$ 이라면

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\log f(c+t) - \log f(c)}{t} = \frac{d}{dx} \log f(x) \,|_{x=c} = \frac{f'(c)}{f(c)}$$

따라서 준식 $= \exp\left(\dfrac{f'(c)}{f(c)}\right)$ 이다.

(2) (1)에서 $f(x)=\tan x$, $c=\frac{\pi}{4}$라 놓으면 $f'(x)=\sec^2 x$ 이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$ 이고 따라서 준식$=e^2$ 이다.



2′. 그림처럼 변의 길이를 정하면 원의 외접조건에서

$$a+c=b+d \quad \cdots\cdots (1)$$

cosin 법칙에서

$$a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C=\overline{BD}^2 \quad \cdots (2)$$

또 면적의 공식에서

$$S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C=\sqrt{abcd} \quad \cdots\cdots (3)$$

(1)에서 $a-d=b-c$ 이고 따라서 $a^2+d^2-2ad=b^2+c^2-2bc$ $\cdots$ (1)′

(2)−(1)′ 하면 $ad-ad\cos A=bc-bc\cos C$ 즉 $ad-bc=ad\cos A-bc\cos C$

제곱하면 $(ad-bc)^2=a^2d^2\cos^2 A+b^2c^2\cos^2 C-2abcd\cos A\cos C$ $\cdots\cdots$ (4)

(3)에서 $4abcd=a^2d^2\sin^2 A+b^2c^2\sin^2 C+2abcd\sin A\sin C$ $\cdots\cdots$ (3)′

(4)+(3)′ 에서 $(ad-bc)^2+4abcd=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C)$

따라서 $\cos(A+C)=-1$ 이고 $A+C=\pi$ 이다. 따라서 사각형 $ABCD$는

는 원에 내접한다.

3. $n\times n$ 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

의 역행렬 A^{-1}를 N에 관한 식으로 나타내어라. 여기서 N은

$$N=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ 이다.

3′ (2분야). 중심이 O, 반지름 r인 원에 내접하는 정 n각형의 꼭지점을 각각 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 이라 하고, 선분 OA_1의 A_1쪽 연장선 위에 점 P를 잡고, 선분 OP의 길이를 $\overline{OP}=d$ 라 하자. 이때 $\prod_{i=1}^{n} \overline{PA_i}$ 를 r, n, d 로 나타내어라.

풀이

$A=I+N$, $N^n=0$ 이므로 $(I+N)=(I-N+N^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}N^{n-1})$
$=I+(-1)^{n-1}N^n=I$ 따라서 $I=A(I-N+N^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}N^{n-1})$
즉, $A^{-1}=I-N+N^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}N^{n-1}$.

3′. O를 극좌표의 중심, 직선 OA_1을 실수축으로 잡으면, A_1의 좌표는 $(r, 0)$, P의 좌표는 $(d, 0)$ 이다. 1의 원시 n 승근을 ω라 하면 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 가 나타내는 복소수는 $r=r\omega^0, r\omega^1, r\omega^2, \cdots\cdots, r\omega^{n-1}$ 이어서

$\overline{A_i P} = |d-r\omega^{i-1}|$ 이다.

따라서 $\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i P} = |(d-r)(d-r\omega)\cdots(d-r\omega^{n-1})|$

$$= r^n \left| \left(\frac{d}{r}-1\right)\left(\frac{d}{r}-\omega\right)\cdots\left(\frac{d}{r}-\omega^{n-1}\right) \right|$$

여기서 $x^n-1=(x-1)(x-\omega)\cdots\cdots(x-\omega^{n-1})$을 적용하면

$\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i P} = r^n \left| \left(\frac{d}{r}\right)^n - 1 \right| = d^n - r^n$ $(d>r)$ 이다.

4. 세변의 길이가 각각 a, b, c 인 삼각형의 면적을 T라 하자.

(1) 부등식 $a^2+b^2+c^2 \geq kT$ 를 성립시키는 최대의 상수 k를 구하라.

(2) 위 부등식에서 등호가 성립하는 것은 언제인가?

4′ (2분야). 함수 $f_0(x)$를 폐구간 $[0, a]$에서 연속인 함수라 하고, $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$, $n=1, 2, \cdots$로 정의한다.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$는 $[0, a]$의 모든 값 x에 대해 수렴함을 보여라.

(2) 함수 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$는 $[0, a]$에서 연속임을 보여라.

풀이

(1) $p=a+b+c$라 놓으면 $p^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이고 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$. 따라서

$p^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)$. 따라서

$p^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$이고 등호는 $a=b=c$일 때다.

한편 둘레가 일정한 삼각형의 면적은 정삼각형일때 최대이므로 임의의 삼각형

에 대해 $T\leq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{p}{3}\right)^2$ 즉 $p^2\geq 12\sqrt{3}\,T$이다.

이상에서 $a^2+b^2+c^2\geq \frac{p^2}{3}\geq 4\sqrt{3}\,T$. 따라서 k의 최대 값은 $4\sqrt{3}$ 이다.

(2) (1)에서 등호는 $a=b=c$ 즉 정삼각형일때 성립한다.

4′.(1) $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$ 이므로 $f'_n(x)=f_{n-1}(x)$이고 따라서,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

$f_0(x)$는 $[0,a]$에서 연속이므로 유계이고 따라서 $0\leq x\leq a$ 일 때

적당한 상수 M이 존재하여 $|f_0(x)|\leq M$ 이다.

따라서, $|f_1(x)|=\left|\int_0^x f_0(x)\,dx\right|\leq \int_0^x |f_0(x)|\,dx\leq \int_0^x M dx=Mx.$

$$|f_2(x)|\leq \int_0^x |f_1(x)|\,dx\leq \int_0^x Mx\,dx=\frac{M}{2}x^2.$$

이를 반복하면 $|f_n(x)|\leq \frac{M}{n!}x^n$ $(n=1,2,\cdots)$을 얻는다. 따라서

$\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!}x^n=Me^x\leq Me^a$이므로 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$는 절

대 수렴하고, 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$는 수렴한다.

(2) $f_n(x)$는 연속함수이다. $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$라 하면 이는 $[0,a]$에서

절대수렴하므로 $0\leq t\leq a$인 t에 대해 $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$도 절대수렴한

다. 따라서, $g(x)-g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(f_n(x)-f_n(t))$이고 (1)에서

$$|f_n(x)|\leq \frac{M}{n!}x^n\leq \frac{M}{n!}a^n \text{ 이므로}$$

$$f_n(x) - f_n(t) \le \int_t^x f_{n-1}(t)\,dt \le \left| \int_t^x f_{n-1}(t)\,dt \right|$$

$$\le \int_t^x |f_{n-1}(t)|\,dt \le \int_t^x \frac{M}{(n-1)!}\, a^{n-1} dt \le \frac{Ma^{n-1}}{(n-1)!}\,|x-t|$$

$$(n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

이고, $\lim_{t \to x} (f_0(x) - f(t)) = 0$ 이다. 따라서,

$$g(x) - g(t) \le |f_0(x) - f_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ma^{n-1}}{(n-1)!}\,|x-t|$$

$$= |f_0(x) - f_0(t)| + Me^a\,|x-t|$$

따라서 $\lim_{t \to x} |g(x) - g(t)| = 0$ 이고 $\lim_{t \to x} g(t) = g(x)$

즉, $g(x)$는 $[0,\ a]$에서 연속이다.

5. 폐구간 $[0,\ 1]$에서 개구간 $(0,\ 1)$로 가는 전단사 함수가 존재한다. 구체적으로 이러한 함수의 예를 들고, 전단사 함수임을 보여라.

풀이

f를 다음과 같이 정의하자. $f : [0,\ 1] \to (0,\ 1)$

$f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $n \ge 2$인 자연수 n에 대해 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2}$

그리고 $0,\ 1,\ \frac{1}{n}$ 꼴이 아닌 나머지 실수 x에 대해 $f(x) = x$. 이는 명백히 전단사이다.

(2차)

1. 2차 미분가능하고 항등적으로는 0이 아닌 함수 $f(x)$가 $f''(0) = -2m^2$ 이고, 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$를 만족시킨다. 이러한 함수 $f(x)$를 구하여라.

1′ (2분야). -50부터 50까지 서로 다른 10개의 정수로 이루어진 집합 A가 있다. 집합 A의 부분집합중 공집합이 아니고, 서로소(공통부분이 없음)이며, 그 각각의 원소들의 합이 같은 두 개의 부분집합이 존재함을 보여라.

풀이

$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ ·· (1)

$y=0$ 일때 $2f(x)=f(x)f(0)$이고 $f(x)$는 항등적으로는 0이 아니므로 $f(0)=2$이다. (1)을 양변 y로 미분하면

$$f'(x+y)-f'(x-y)=f(x)f'(y) \quad \cdots\cdots (2)$$

$y=0$ 일때 $f(x)f'(0)=0$. 따라서 $f'(0)=0$.

(2)를 다시 y에 대해 미분하면

$$f''(x+y)+f''(x-y)=f(x)f''(y)$$

$y=0$ 일때 $2f''(x)=f''(0)f(x)=-2m^2f(x)$ 즉 $f''(x)=-m^2f(x)$이고 이는 2계 선형 미분방정식이므로 일반해는

$$f(x)=C_1\cos mx+C_2\sin mx \quad \cdots\cdots (3)$$

이다. $f(0)=2$ 이므로 (3)으로부터 $C_1=2$ 이다. 또 (3)을 x에 관해 미분하면 $f'(x)=-mC_1\sin mx+mC_2\cos mx$ 이고 $f'(0)=0$ 이므로 $C_2=0$ 이다. 따라서 $f(x)=2\cos mx$ 이다.

1′. 집합 S의 원소들의 합을 기호로 $\Sigma(S)$로 표시하자. 집합 A의 양의 원소들의 합을 M, 음의 원소들의 절대값의 합을 N이라 하면 A의 부분집합들이 가질 수 있는 합의 경우의 수는 $M+N+1$가지이며 이의 최대값은 $M=N=50+49+48+47+46=240$이고 $M+N+1=481$이다. 한편 공이 아닌 A의 부분집합의 갯수는 $2^{10}-1=1023$이므로 A의 부분집합들 중 합이 같은 것이 적어도 한 쌍 존재한다.

(i) A의 부분집합들 중 그 원소의 합이 0인 것이 하나도 없을 경우 :

원소들의 합이 같은 집합을 B_1, B_2라 하자.

$C_1=B_1-B_1\cap B_2$, $C_2=B_2-B_1\cap B_2$ 라 하면 $C_1\cap C_2=\phi$이고 $\Sigma(C_1)=\Sigma(C_2)$이며 C_1, C_2는 공집합이 아니다.

($\because$ $\Sigma(C_1)=\Sigma(C_2)\neq 0$) 따라서, C_1, C_2가 구하는 집합이다.

(ii) A의 부분집합들 중 그 원소의 합이 0인 것이 2개 이상 있을 때 :

이를 B_1, B_2라 하자.

(ㄱ) $B_1\cap B_2=\phi$이면 이들이 구하는 집합이다.

(ㄴ) $B_1\not\subset B_2$, $B_2\not\subset B_1$, $B_1\cap B_2\neq\phi$ 일 때

$C_1=B_1-B_1\cap B_2$, $C_2=B_2-B_1\cap B_2$ 라 놓으면

$C_1\cap C_2=\phi$, $\Sigma(C_1)=\Sigma(C_2)=0$이 되어 구하는 집합이다.

(ㄷ) $B_1\subset B_2$ ($B_2\subset B_1$ 도 마찬가지)이면 $C_2=B_2-B_1$, $C_1=B_1$ 이라

하면 C_1, C_2 가 구하는 집합이다.

(iii) 집합 A의 부분집합중 그 원소의 합이 0인 것이 하나밖에 없을 때 :

이를 B라 하자. 만약 $B=A$이면 1023개의 부분집합들 중 A를 제외한 나머지 1022 가지의 부분집합에 대해 (i)과 같이 생각하면 된다. 만약 $B \neq A$라면 $C=A-B$라 하고 C의 원소의 갯수를 k ($1 \leq k \leq 9$)라 하면 B의 원소의 갯수는 $10-k$이다. 이 때 2^k-1 개의 C의 부분집합 C_i ($i=1, 2, \cdots, 2^k-1$)에 대해 $B_i = B \cup C_i$ 라 하면 $\Sigma(B) = 0$ 이므로 $\Sigma(B_i) = \Sigma(B) + \Sigma(C_i) = \Sigma(C_i)$ ($\neq 0$)이다.

이때 (i)의 경우를 적운시키려면 $C_i \subset B_i$ 인 딜렘마가 생긴다.

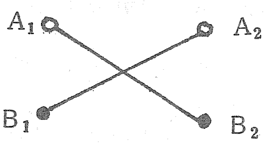
1023개의 부분집합들 중 2^k-1개의 부분집합 B_i와 B를 제외한 $1023-2^k$ 개의 부분집합들에는 원소의 합이 0인 집합이 없다. 또 $1023-2^k$의 최소값은 $1023-2^9=511$이고, 이는 481가지의 경우의 수보다 작으므로 이들 중에는 원소의 합이 같은 것이 적어도 한 쌍 존재하며 이를 D_1, D_2라 할 때 (i)과 같이 하여 $E_1 = D_1 - D_1 \cap D_2$, $E_2 = D_2 - D_1 \cap D_2$, $E_1 \neq \phi \neq E_2$, $E_1 \cap E_2 = \phi$ 이고 $\Sigma(E_1) = \Sigma(E_2)$가 되어 E_1, E_2 가 구하는 집합이다.

2. 평면위의 어느 세 점도 동일 직선상에 있지 않는 $2n$개의 점이 있다. n개의 점은 흰색이고, 나머지 n개의 점은 검은색이라 한다. 이때 검은색인 한점과 흰색인 한 점을 이어서 생기는 n개의 선분중 어느 두개도 공통점을 가지지 않도록 이을 수 있음을 보여라.

2′ (2분야). $p(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x + 1$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 일 때

$p(A)$의 고유치 (Eigen Value)를 구하여라.

풀이



선분의 길이를 최소가 되게 연결하면 공통점은 없다. (만일 공통점을 갖는 두 선분이 있다고 하자. (그림 참조). $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$는 공통점이 없고

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} < \overline{A_1B_2} + \overline{A_2B_1} \text{ 이므로}$$

합이 최소라는 사실에 모순이다. 따라서 최소가 되게 선을 이으면 공통점은 하나도 없다.)

2′. A의 고유치는 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ 이며 따라서

$p(A)$의 고유치는 $p(\lambda_i)$ ($i = 1, 2, 3$)이다. $p(\lambda_1) = p(2) = 17$ 이고

$p(x) = (x^2 - 3x - 2)(x^3 + x^2 + 8x + 26) + 90x + 53$ 이므로

$p(\lambda_2) = 90\lambda_2 + 53 = 188 + 45\sqrt{17}$. $p(\lambda_3) = 188 - 45\sqrt{17}$.

즉 $p(A)$의 고유치는 17, $188 \pm 45\sqrt{17}$ 이다.

3. n은 2보다 큰 주어진 정수이다. 이 때 다음 관계를 만족시키는 양의 정수해 (x, y, z)의 가지수를 n를 나타내어라.

$$x + y + z = n, \quad x \leq y + z, \quad y \leq z + x, \quad z \leq x + y$$

3′. (2분야) 다음 연립 미분방정식의 일반해를 구해라.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 + 2x_2 + \dfrac{1}{t} & \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 + \dfrac{2}{t} + 4 & \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

풀이

(i) $n = 2m$일 때

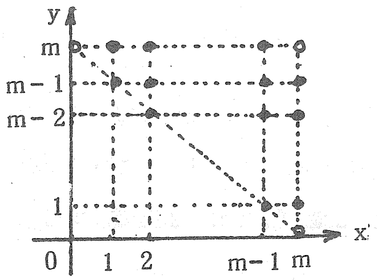
$x \leq m$, $y \leq m$, $x + y \geq m$,

$x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이므로

$x + y \leq 2m - 1$. 따라서

$(0, m)$, $(m, 0)$, (m, m)은

제외하고 그림의 격자점의 수가 그 수효이다.



$$S = 2 + 3 + \cdots + m + (m-1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m-2) = \frac{m^2 + 3m - 4}{2}$$

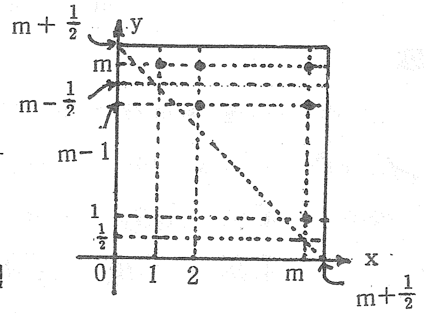
$$= \frac{1}{8}(n+8)(n-2).$$

(ii) $n = 2m + 1$ 일 때

$x \leq m + \dfrac{1}{2}$, $y \leq m + \dfrac{1}{2}$, $x + y \geq m + \dfrac{1}{2}$

$x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이므로

$x + y \leq 2m$. 따라서 구하는 격자점의 수효는



$$S = 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{8}(n-1)(n+1)$$

3′. ①+②×② 에서 $\quad \dfrac{d}{dt}(x_1 + 2x_2) = \dfrac{5}{t} + 8$

즉, $x_1 + 2x_2 = 5\log|t| + 8t + a$ ………………………………… (3)

2 ×①−② 에서 $\quad \dfrac{d}{dt}(2x_1 - x_2) = -5(2x_1 - x_2) - 4$

즉, $2x_1 - x_2 = be^{-5t} - \dfrac{4}{5}$

따라서
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2b}{5}e^{-5t} + \dfrac{a}{5} + \log|t| + \dfrac{8}{5}t - \dfrac{8}{25} \\ x_2 = -\dfrac{b}{5}e^{-5t} + \dfrac{2}{5}a + 2\log|t| + \dfrac{16}{5}t + \dfrac{4}{25} \end{cases}$$

즉,
$$\begin{cases} x_1 = C_1 + 2C_2e^{-5t} + \log|t| + \dfrac{8}{5}t \\ x_2 = 2C_1 - C_2e^{-5t} + 2\log|t| + \dfrac{16}{5}t + \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

4. p, q를 서로 다른 소수(素數, 단, $p < q$), m, n를 자연수라 할 때, $A = p^m q^n$의 모든 약수(1과 A를 포함)의 합이 $2A$가 되는 p, q, m, n의 값을 정하고 $A < 1000$ 인 모든 A를 구해라.

4′ (2분야) 두 개의 반직선 OX, OY로 이루어진 $\angle XOY$ 안에 점 P가 주어져 있다. P를 지나는 직선이 OX, OY와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 PA와 PB의 길이의 곱 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$를 최소되게 하는 점 A, B를 작도에 의해서 구하고, 그 이유를 설명하라. 단, $\angle XOY$의 크기는 π보다 작다.

풀이

A의 약수의 합은 $(1 + p + p^2 + \cdots + p^m)(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$ 이므로

$$\frac{p^{m+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 2p^m \cdot q^n \qquad \text{따라서}$$

$$\frac{q^{n+1} - 1}{q^n(q-1)} = 2\,\frac{p^{m+1} - p^m}{p^{m+1} - 1} \qquad \therefore\ 1 + \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = 2 - 2\,\frac{p^m - 1}{p^{m+1} - 1}$$

$$\therefore\ \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = \frac{p^{m+1} - 2p^m + 1}{p^{m+1} - 1} \qquad \therefore\ \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{p^{m+1} - 1}{p^{m+1} - 2p^m + 1}$$

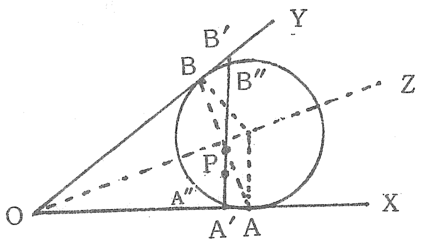
$$\therefore\ q - 1 + \frac{q - 1}{q^n - 1} = 1 + 2\,\frac{p^m - 1}{p^m(p-2) + 1}$$

$$\therefore \quad q+\frac{q-1}{q^n-1} = 2+2\,\frac{p^m-1}{p^m(p-2)+1}$$

여기서 $p=2$ 일 때는 $q+\dfrac{q-1}{q^n-1} = 2^{m+1}$ 따라서 $\dfrac{q-1}{q^n-1}$ 이 정수이고 이 때는 $n=1$ 일 때 뿐이다. 이때 $q=2^{m+1}-1$ 이고 이는 소수(素數)이다. $p \geq 3$ 일 때 $\dfrac{p^m-1}{p^m(p-2)+1} < 1$ 이므로 $q+\dfrac{q-1}{q^n-1} < 4$ 이고 $p<q$ 이므로 $3<q$ 이어서 이런 q는 존재하지 않는다.

즉, $p=2$, $n=1$, $q=2^{m+1}-1$ 이다. 이때 $A<1000$ 인 A는 6, 28, 496 3개 뿐이다.

4′. $\angle XOY$의 이등분선을 OZ라 하고 P를 지나 OZ에 수선을 그어 그 연장과 OX, OY의 교점을 A, B라 하면 A, B가 구하는 점이다. (이때 $\overline{OA}=\overline{OB}$이고 A, B에서 OX, OY에 수선을 그어 그 교점을 C라 하면 C는 OZ상에 있다. C를 중심으로 하고 $\overline{CA}=\overline{CB}$를 반지름으로 하는 원을 그리면 원 C는 점 A, B에서 각각 OX, OY와 접한다. P를 지나는 직선이 OX, OY와 만나는 점을 각각 A', B', 원 C와 만나는 점을 각각 A'', B''라 하면



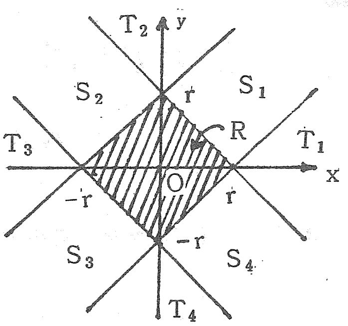
$\overline{PA'}\cdot\overline{PB'} \geq \overline{PA''}\cdot\overline{PB''} = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$가 된다. 즉 A, B가 최소가 되는 점이 된다.)

5. (x, y) 평면에서 $|x|+|y| \leq r$ (r은 양의 실수)로 나타내어진 영역을 R이라 하고 (x, y) 평면상의 점 $P(x, y)$에서 영역 R에 이르는 거리를 $D(x, y)$라 한다. 도형 R의 면적을 A, 둘레의 길이를 L이라 할 때

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-D(x,y)}\,dx\,dy = aA+bL+c$$

(a, b, c는 상수)이 성립한다고 한다. 상수 a, b, c의 값을 구하여라. 여기서 점 $P(x, y)$에서 도형 R에 이르는 거리란 R 위의 점과 P와의 거리의 최소값을 말한다.

풀이



(i) $P \in R$ 일 때 $D(x, y) = 0$ 이고

따라서 $\iint_R e^{-D(x,y)}\, dx\, dy = \iint_R dx\, dy$

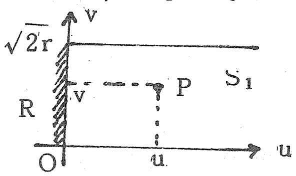
$= A.$

(ii) $P \in S_1$ 일때 직교 좌표의 변환에서

$D(x, y) = D(u, v) = u$ 이고

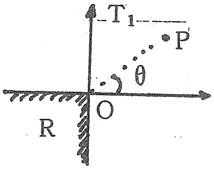
$$\iint_{S1} e^{-D(x\ y)}\, dx\, dy = \iint_{S1} e^{-u}\, du\, dv = \int_0^{\sqrt{2}r} \int_0^{\infty} e^{-u}\, du\, dv = \sqrt{2}\, r$$

같은 방법으로 $\iint_{S1} = \iint_{S2} = \iint_{S3} = \iint_{S4}$ 이고 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ 라면



$\iint_S = 4 \cdot \sqrt{2}\, r = L$ 이다.

(iii) $P \in T_1$ 일 때 극좌표 변환에서



$D(x, y) = D(\rho, \theta) = \rho$ 이고

$dx\, dy = \rho d\ \rho d\theta$ 이므로

$$\iint_{T1} e^{-D(x\ y)}\, dx\, dy = \iint_{T1} e^{-\rho} \rho d\ \rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho d\ \rho d\theta = \frac{\pi}{2}$$

이고 같은 방법으로 $\iint_{T1} = \iint_{T2} = \iint_{T3} = \iint_{T4}$ 이며 $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ $\cup T_4$ 라 하면

$$\iint_T e^{-D(x\ y)}\, dx\, dy = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \text{ 이다.}$$

따라서 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D(x\ y)}\, dx\, dy = \iint_R + \iint_S + \iint_T = A + L + 2\pi$ 이고

$a = 1 = b$, $c = 2\pi$ 이다.

제 3 회

(**1차**)

1. 자연수 n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$을 구하여라.

풀이

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\log(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\log 2.$$

2. $0<x<1$ 인 x에 대하여 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 임을 보여라.

단, $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$ 이다.

풀이

$$\begin{aligned} I_m=(1-x)\prod_{n=0}^{m}(1+x^{2^n}) &= (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^m}) \\ &= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots\cdots(1+x^{2^m}) \\ &= 1-x^{2^m}. \end{aligned}$$

따라서 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n})=\lim_{m\to\infty}\frac{I_m}{(1-x)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1-x^{2^m}}{1-x}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$

3. 실수의 집합 R에서 무리수의 집합 I로 가는 전단사 함수를 구성하여라.

풀이

I를 무리수의 집합이라 하고 f를 다음과 같이 정의하자.

$f(r)=re$ (r ; 유리수 $\neq 0$)

$f(n\pi)=(n+1)\pi$ ($n\geq 0$ 인 정수) (특히 $f(0)=\pi$)

$f(re+m)=re+m+1$ ($m\geq 0$ 인 정수)

나머지 x에 대해 $f(x)=x$

이때 f는 명백히 전단사 함수이다.

4. 다음과 같이 정의된 수열 $\{S_n\}$이 있다. $\lim_{n\to\infty}S_n$이 존재함을 밝히고, 이 극한을 구해라. (단, $a>0$ 이다.)

$S_1=\sqrt{a}$, $S_2=\sqrt{a+S_1}$, $S_3=\sqrt{a+S_2}$, …, $S_n=\sqrt{a+S_{n-1}}$, …

풀이

명백히 $\{S_n\}$은 증가수열이다.

(i) $a\geq 1$: 이때 $S_1=\sqrt{a}\leq a<a^2+a+1$ 이고 만약 $S_n<a^2+a+1$ 이면 $S_{n+1}=\sqrt{a+S_n}<\sqrt{a+(a^2+a+1)}=a+1<a^2+a+1$ 로 수학적 귀납법에 의해 $S_n<a^2+a+1$ 이다. 즉, S_n은 유계이다.

따라서 $\{S_n\}$은 극한 값을 갖고 이를 α라 놓으면

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a+S_{n-1}} = \sqrt{a+\alpha}$$ 이어서 $\alpha^2 = a+\alpha$이고

$\alpha > 0$ 이므로 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ 이다.

(ii) $0<a<1$ 이때 $\sqrt{a}<1$ 이므로 $a+1=v$ 라면 $v\geq 1$ 이고

$S_2 = \sqrt{a}+\sqrt{a} < \sqrt{a+1} = \sqrt{v} < v^2+v+1.$

$S_n < v^2+v+1$ 이라면

$$S_{n+1} = \sqrt{a+S_n} < \sqrt{a+v^2+v+1} = \sqrt{v^2+2v} < \sqrt{v^2+2v+1}$$
$$= v+1 < v^2+v+1.$$ 즉, 모든 n에 대해 $S_n < v^2+v+1$.

따라서 이 경우도 극한 값을 가지며 그 값은 (i)의 경우와 같다.

주 $a=0$ 이면 S_n의 극한값은 0이다.

5. 1984^{720}의 모든 약수들의 기하평균을 구하여라. (n개의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 의 기하평균은 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\frac{1}{n}}$ 이다.)

풀이

양의 정수 n의 양의 약수들의 곱은 1회 2차시험 5번에 의해

$f(n) = n^{\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{2}(1+e_1)\cdots\cdots(1+e_k)$이고 양의 약수들의 갯수

$\tau(n) = (1+e_1)\cdots\cdots(1+e_k)$ 이므로 양의 약수들의 기하평균은

$$(n^{\lambda})^{\frac{1}{\tau(n)}} = \sqrt{n}$$ 이다.

따라서 1984^{720}의 양의 약수들의 기하평균은 1984^{360} 이다.

(2차)

1. n이 자연수 일 때, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$ 를 구하여라.

풀이

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx \qquad \left(x = \frac{\pi}{2}-u\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^n u}{\sin^n u+\cos^n u}(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$$

따라서 $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, 즉 $I = \dfrac{\pi}{4}$이다.

2. $0 < x < 2\pi$인 x에 대하여

$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$라 할때

(1) $S_n(x)$를 간단히 하여라

(2) $\lim_{n\to\infty} n S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$를 구하여라.

풀이

(1) $2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{n}{2}x = \cos\left(\frac{n-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)$ 이므로

$$2\left(\sin\frac{x}{2}\right)S_n(x) = 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx\right)$$

$$= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2}x + \cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x$$

$$+ \cdots + \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$= \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x = 2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x$$

$0 < x < 2\pi$이므로 $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ 이고 따라서

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$ 이다.

(2) $$nS_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = n\cdot\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2n}\pi\right)\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = n\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$= n\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = n\cdot\cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} nS_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \infty$

3. 이차곡면

$$5x^2 + 5y^2 + 9z^2 + 2xy - 6xz - 6yz - 22x - 38y + 42z + 53 = 0$$

를 표준형으로 고쳐라.

풀이

$f(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 6yz - 6zx + 2xy - 22x - 38y + 42z + 53$
$= 0$ 이라 놓으면

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 144 > 0, \quad D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 & -11 \\ 1 & 5 & -3 & -19 \\ -3 & -3 & 9 & 21 \\ -11 & -19 & 21 & 53 \end{vmatrix} = -5319$$

한편 고유방정식은 $\begin{vmatrix} 5-x & 1 & -3 \\ 1 & 5-x & -3 \\ -3 & -3 & 9-x \end{vmatrix} = -(x^3 - 19x^2 + 96x - 144)$

$= -(x-4)(x-3)(x-12)$ 이고 따라서 고유치는 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 12$

이다. 한편 이 때 변환의 상수항 $d = \dfrac{D}{4} = -\dfrac{5319}{144}$ 이고 따라서

표준형은

$$4X^2 + 3Y^2 + 12Z^2 = \frac{5319}{144}$$ 즉, 타원체이다.

4. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 는 대항식 $f(t) = t^4 - 5t^3 + 2t^2 - 2t + 1$

을 만족함을 보여라. 즉, $f(A) = 0$ 을 보여라.

풀이

A의 고유방정식은

$|A - xI| = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = f(x)$ 이므로

$f(A) = 0$ 을 만족한다.

5. 다음 삼각 이중 수열

a_{00}
$a_{10},\ a_{11}$
$a_{20},\ a_{21},\ a_{22}$
$a_{30},\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$
.... 에서 $a_{ij} \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = 1$ 이다.

S에 수렴하는 임의의 수열 $\{S_n\}$에 대하여 $X_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty} X_n = S$일 필요충분 조건은 각 k에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ 임을 보여라.

풀이

(i) $S=0$ 이라 하자. S에 수렴하는 $\{S_n\}$에 대해 고정된 임의의 수 k에 대해 $S_k = 1$, $S_n = 0$ $(n \neq k)$라 하자.

그러면 $X_n = \sum_{i=0}^{n} a_{ni} S_i = a_{nk}$ $\quad (n \geq k)$

이때 $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} a_{nk} = S = 0$ 이므로 조건이 성립한다.

(ii) 반대로 $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ 이라 하자. 그러면 적당한 상수 N이 존재하여 $|S_n - S| < \varepsilon$ $(n \geq N)$을 만족하고 $a_{mk} < \varepsilon$이 되도록 $m \geq M \geq N$을 선택할 수 있다. 한편 적당한 실수 A에 대해 $|S_n - S| \leq A$가 모든 n에 대해 성립하게 할 수 있다.

그러면

$$
\begin{aligned}
|X_n - S| &= \left| \sum_{k=0}^{m} a_{mk} S_k - S \right| = \left| \sum_{k=0}^{m} a_{mk} (S_k - S) \right| \\
&\leq a_{m0} |S_0 - S| + a_{m1} |S_1 - S| + \cdots + a_{mN} |S_N - S| \\
&\quad + \cdots + a_{mm} |S_m - S| \\
&\leq NA\varepsilon + \varepsilon (a_{mN} + \cdots + a_{mm}) \\
&\leq NA\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon (NA + 1)
\end{aligned}
$$

따라서 $X_n \to S$ 이다.

제 4 회

(1차)

1. $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})}$ 를 구하여라.

풀이

$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})}$ 라 하고 $z = \tan\theta$로 치환하면

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sec\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{\cos\theta+1}\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta+1}\, d\theta$$

여기서 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$로 치환하면

$$I = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} \cdot \frac{2}{t+t^2}\, dt = -\int_0^1 dt + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. 삼각형 ABC에서 $3(\cot A + \cot B + \cot C) \geq \cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}$

임을 보여라.

풀이

sine 정리에 의해 R을 삼각형 ABC의 외접원의 반지름, a, b, c를 세 변의 길이라 하면 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ 이다.

한편 제 2 cosine 정리에 의해

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

따라서

$$3(\cot A + \cot B + \cot C) = 3 \cdot \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc} = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S}$$

이고, 여기서 S는 삼각형의 면적이다.

한편 내접원의 반지름을 r, $u = \dfrac{a+b+c}{2}$라 하면

$r = \dfrac{S}{u} = (u-a)\tan\dfrac{A}{2} = (u-b)\tan\dfrac{B}{2} = (u-c)\tan\dfrac{C}{2}$ 이다.

따라서 $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{u^2}{S} = \dfrac{(a+b+c)^2}{4S}$

이고 $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ 이므로 준 부등식이 성립한다.
(등호는 $a=b=c$ 즉, 정삼각형일 때 성립한다.)

3. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1985$ 가 되는 n개의 자연수 a_i 들의 곱 $p = a_1 a_2 \cdots a_n$ 이 최대가 될때 n의 값과 p의 최대값을 구해라.

풀이

우선 p가 최대일려면 a_i의 대부분이 3이고 나머지가 2여야 함을 보인다. 만약 $a_i \geq 4$ 라면 $a_i = 2 + (a_i - 2)$ 이고 $2(a_i - 2) = 2a_i - 4$이며 $2a_i \geq 4 + a_i$ 에서 $2a_i - 4 \geq a_i$ 로 p의 값을 증가시킬 수 있다. 이 조작을 반복하면 a_i를 2 또는 3으로 만들 수 있다. 이렇게 하여 p의 값을 증가시키는데 $a_i = 1$ 이라면 적당한 a_j와 합하여 합은 보존시키고 곱을 $1 \cdot a_j = a_j$에서 $a_j + 1$ 만큼 증가시켜 준다. 즉 p의 최대값의 꼴은 $2^x \cdot 3^y$ 형태이다. 여기서 $x \geq 3$ 이면 그들의 3개를 묶어 $2+2+2=3+3$ 으로 함으로써 합은 보존시키고 곱은 $2^3 < 3^2$ 으로 증가시킬 수 있다. 따라서 p의 최대값은 $2^a \cdot 3^b$ 의 꼴이고 $a = 0, 1$ 또는 2이다. 한편 $1985 = 3 \cdot 661 + 2$ 이므로 p의 최대값은 $2 \cdot 3^{661}$이고 이때 n의 값은 662 이다.

4. 복소수 $z = x + y_i$ (x, y는 유리수)에서 $|z| = 1$ 이면 임의의 자연수 n 에 대하여 $|z^{2n} - 1|$ 도 유리수임을 보여라.

풀이

$z = e^{i\theta}$라 하고 $z^n = w = u + iv$ (u, v는 실수)라 하자. 그러면 $|z^{2n} - 1| = |w^2 - 1| = \sqrt{(u^2 - v^2 - 1)^2 + (2uv)^2} = 2|v|$ 이다. ($\because$ $|z| = 1$에서 $|z^n| = u^2 + v^2 = 1$) 따라서 $v = \sin n\theta$가 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$가 유리수가 됨을 증명하면 된다. $n \geq 0$ 일 때는 수학적 귀납법에 의해 증명되고 $n < 0$ 일 때는 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ 라는 사실에서 증명된다.

5. 함수 $f(x)$가 볼록함수 즉, 모든 실수 x, y와 모든 λ ($0 \leq \lambda \leq 1$)에 대해 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$의 관계가 만족될 때 다음이 성립함을 보여라. $\dfrac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ (단, $x \neq y$)

풀이

$I = \int_0^1 f(\lambda x + (1-\lambda)y)\,d\lambda$에서 $t = \lambda x + (1-\lambda)y$로 치환하면

$$I = \int_y^x \frac{f(t)}{x-y}\,dt = \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt \leq \int_0^1 \{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right]$$

(2차)

1. 폐구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 f가 $f(0)=0$ 이고, $0<x<1$ 인 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 1$ 일 때 다음을 증명하여라.

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 \{f(x)\}^3\,dx.$$

풀이

$G(t)=[f(t)]^2-2\int_0^t f(x)\,dx \quad (t\in[0, 1])$이라 놓으면 $G(0)=0$이고,

$G'(t)=2f(t)f'(t)-2f(t)=2f(t)[f'(t)-1]\geq 0$ 이다. 따라서 $G(t)\geq 0$ 이고 $f(t)G(t)\geq 0$ 이다.

$F(t)=\int_0^t [f(x)]^3dx-\left[\int_0^t f(x)dx\right]^2 \quad (t\in[0, 1])$ 이라 놓으면

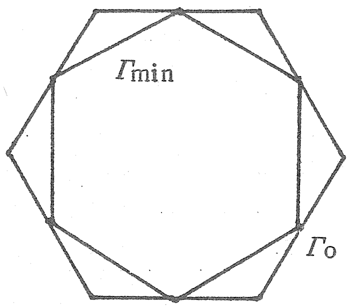
$F(0)=0$ 이고 $F'(t)=[f(t)]^3-2f(t)\left[\int_0^t f(x)dx\right]=f(t)\left[[f(t)]^2-2\int_0^t f(x)dx\right]=f(t)G(t)\geq 0$ 이다. 따라서 $F(t)\geq 0$ 이고 $t=1$ 일 때 특별히 우리의 부등식을 얻는다.

2. 변의 길이가 1인 정 6 각형의 각 한 변위에 한 점씩을 잡아서 이들을 꼭지점으로 하는 각 변의 길이를 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 이라 할 때

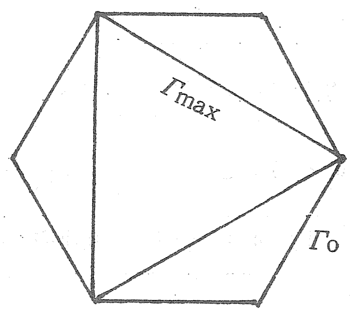
$$\frac{9}{2}\leq x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2\leq 9$$ 임을 증명하여라.

풀이

주어진 정 6 각형을 Γ_0라 하고 각 그림 1, 2를 Γ_{min}, Γ_{max}라 하자. 또 각 도형의 변의 길이의 제곱의 합을 기호로 $\Sigma\Gamma^2$ 이라 나타내자.

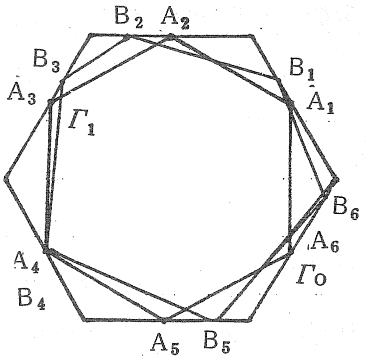


(그림 1)



(그림 2)

이제 Γ_{min} 을 정 6 각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 라 하고 Γ_0 안에 주어진 조건대로 그려진 새 도형 Γ_1 을 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 라 하자. (여기서 두 점이 같을 수도 있다.) 여기서 $\overline{A_iB_i} = t_i$ 라 놓으면



$0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}$ 이다.

그러면 $\Sigma\Gamma_1^2 = (\frac{1}{2}\pm t_1)^2 + (\frac{1}{2}\pm t_6)^2$

$+(\frac{1}{2}\pm t_1)(\frac{1}{2}\pm t_6) + (\frac{1}{2}\mp t_1)^2$

$+(\frac{1}{2}\pm t_2) + (\frac{1}{2}\mp t_1)(\frac{1}{2}\pm t_2)$

$+ \cdots\cdots +$

$(\frac{1}{2}\mp t_5)^2 + (\frac{1}{2}\mp t_6)^2 + (\frac{1}{2}\mp t_5)(\frac{1}{2}\mp t_6)$

여기서 t_i 들의 부호는 t_i 끼리는 부호가 바뀌면서 나타나고 t_i 와 나머지 t_j ($i \neq j$)의 부호는 독립적이다. 이를 정리하면

$$\Sigma\Gamma_1^2 = \frac{9}{2} + 2t_1^2 + 2t_2^2 + \cdots + 2t_6^2 + (-1)^{a_1}t_1t_6 + (-1)^{a_2}t_1t_2 + \cdots$$

$$+ (-1)^{a_6}t_5t_6$$ 이고 $a_i = 0$ 또는 1 이다.

한편 $a \geq 0$, $b \geq 0$ 에서

$a^2 + b^2 + (-1)^p ab \geq 0$ ($p=0$ 또는 1) 이므로

$\Sigma\Gamma_1^2 \geq \frac{9}{2}$ 이고, 모든 $t_i = \frac{1}{2}$ 이고 $a_i = 0$ 이면 윗 식은 최대값 9 를 갖으므로

$9 \geq \Sigma\Gamma_1^2$ 이다. 실제로 $\Sigma\Gamma_{min}^2 = \frac{9}{2}$ 이고 $\Sigma\Gamma_{max}^2 = 9$ 이다.

따라서 우리의 부등식은 만족한다.

3. 수렴반경이 1보다 큰 멱급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 으로 주어진 함수 $f(x)$ 에 대하여 $0 < a_0 < -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} a_{2k}$ 가 성립할 때 $f(x) = 0$ 은 개구간 (-1, 1) 에서 적어도 한개의 근을 가짐을 보여라.

풀이

$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{a+1} x^{k+1}$ 이라 놓으면 $g'(x) = f(x)$이고 같은 수렴반경을 갖는다. 따라서

$$g(-1) = -a_0 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \cdots\cdots$$

$$g(1) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \cdots\cdots$$

평균치의 정리에 의해

$\dfrac{g(1) - g(-1)}{1-(-1)} = a_0 + \dfrac{1}{3}a_2 + \dfrac{1}{5}a_4 + \cdots\cdots = g'(r)$. $-1 < r < 1$인 실수 r이 존재한다. 이때 $a_0 < -(\dfrac{1}{3}a_2 + \dfrac{1}{5}a_4 + \cdots\cdots)$ 이므로 $g'(r) = f(r) < 0$ 이고 $f(0) = a_0 > 0$ 이므로 $r \neq 0$ 이며 $f(x)$는 연속이므로 $-1 < s < 1$인 s에 대해 $f(s) = 0$ 인 s가 존재한다.

4. 자연수 x의 각자리수의 곱이 $x^2 - 8x - 32$ 와 같아지는 모든 자연수 x를 구하여라.

풀이

자연수 x가 n자리라 하자. 이때

$x = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots\cdots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1}$. $(0 \leq a_i \leq 9)$ 라면

$p(x) = (a_0 \cdot a_1 \cdots\cdots a_{n-2}) a_{n-1} \leq 9^{n-1} a_{n-1} < 10^{n-1} a_{n-1} \leq x$.

따라서 $x^2 - 8x + 32 < x$ 즉, $x^2 - 9x < 32$.

$$x^2 - 9x + \frac{81}{4} = (x - \frac{9}{2})^2 < 32 + \frac{81}{4} = \frac{209}{4}.$$

따라서 $x - \dfrac{9}{2} < \dfrac{\sqrt{209}}{2} < \dfrac{15}{2}$ 이어서 $x < 12$ 이고 이런 x 중에서 우리의 조건을 만족하는 것은 11 뿐이다.

5. n차 실계수 다항식 $f(x)$들이 이루는 실선형공간에서 $\varphi(f)(x) = f(x+1)$, $\Psi(f)(x) = f'(x)$로 정의된 선형 변환 φ, Ψ의 기저 $1, x, \cdots, x^n$에 관한 행렬을 각각 A, D라고 할 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$A = E + \frac{1}{1!}D + \frac{1}{2!}D^2 + \cdots + \frac{1}{n!}D^n \quad (\text{단, } E\text{는 } (n+1)\text{차 단위행렬}).$$

풀이

$B=\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 을 기저라 하자. 그러면

$$A=[\varphi]_B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & {}_nC_1 & {}_nC_2 & {}_nC_3 & {}_nC_4 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=[\Psi]_B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{bmatrix}$$

이로부터 쉽게 우리의 식을 얻는다.

제 5 회

(1차)

1. 함수 $f(x)$는 폐구간 $[0, 1]$에서 실수 R로 가는 볼록함수, 즉, 모든 실수 x, y와 $0\leq\lambda\leq 1$인 λ에 대하여 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ 라 한다. 이때, $f(\frac{1}{2})\leq\int_0^1 f(t)\,dt$ 임을 보여라.

풀이

우선 $f(\frac{1}{2})\leq\frac{1}{2}\{f(1)+f(0)\}\leq max\,(f(0), f(1))$ 임을 ……………… (1)

$\lambda=\frac{1}{2}$, $x=1$, $y=0$ 으로 놓음으로 알 수 있다. 또

$f(\frac{1}{2}(x+y))\leq\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$ 이므로

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &\le \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &\le \frac{1}{2} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &\le \frac{1}{2} f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)과 (2) 식을 더하면

$$n f\left(\frac{1}{2}\right) \le max\left(f(0),\ f(1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 또는 $f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

이다. 따라서 어느 경우나

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2}\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\left(\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \right)$$

2. $\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{x^2}\,dx\,dy$를 계산하여라.

풀이

$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ 이므로 $\int_{2y}^2 e^{x^2}\,dx = \int_{2y}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\,dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}\Big]_{2y}^{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)\,n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\,y^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}$ 라 하면

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(L - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\,y^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right) dy$$

$$= L - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!} = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

3. $\alpha^n = 1$ 이고 $\alpha^m \neq 1$ $(m=1, 2, \cdots, n-1)$인 수 α에 대하여

$\sum_{i=1}^{n-1} \log |1-\alpha^i|$의 값을 구하여라

풀이

여기서 α는 1의 원시 n승근이므로 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$
$=(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots\cdots(x-\alpha^{n-1})$ 으로부터

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1 = (x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots\cdots(x-\alpha^{n-1})$$

이고 따라서 $(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n$ 이다.

즉 $\sum_{i=1}^{n-1} \log|1-\alpha^i| = \log \prod_{i=1}^{n-1} |1-\alpha^i| = \log n$ 이다.

4. 실수열 $\{a_n\}$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 이면 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$ 임을 보여라.

풀이

$\sigma_n = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 이라 하자. 그러면

$$\sigma_n - a = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n) - a$$

$$\frac{1}{n}\left\{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots\cdots+(a_n-a)\right\}$$

또 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 이므로 주어진 $\varepsilon > 0$에 대해 $m \geq N(\varepsilon)$이면 $|a_m - a| < \varepsilon$인 실수 $N=N(\varepsilon)$이 존재한다. 또 a_n이 수렴하므로 모든 n에 대해 $|a_n - a| < A$인 A가 존재한다. 만약 $n \geq N$ 이면 $|\sigma_n - a| \leq \dfrac{NA}{n} + \dfrac{n-N}{n}\varepsilon$ 이고 충분히 큰 n에 대해 $\dfrac{NA}{n} < \varepsilon$이며 $\dfrac{n-N}{n} < 1$ 이므로 $|\sigma_n - a| < 2\varepsilon$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a$ 이다.

5. $V=\left\{(x_1, x_2, \cdots\cdots) \mid x_i \in R,\ \Sigma x_i^2 < \infty\right\}$일 때 V의 두 원소 X, Y에 대해 $X \cdot Y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ $(X=(x_1, x_2, \cdots\cdots),\ Y=(y_1, y_2, \cdots\cdots))$로 정의하고 $X \cdot Y = 0$ 이면 X, Y는 서로 수직이라 하자. 그러면 임의의 유한개

의 V의 원소에 대하여 이들과 수직이고 $Y \neq 0$인 Y가 V 안에 존재함을 보여라.

풀이

임의의 n개의 원소를 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots\cdots)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$라 하고 모든 $X_i \neq 0$ 이라고 하여도 좋다.

이때 y_i $(i=1, 2, \cdots, n+1)$을 미지수로 하는 n개의 1차 연립방정식

$$\begin{cases} x_{11}\, y_1 + x_{12}\, y_2 + \cdots\cdots + x_{1n}\, y_{n+1} = 0 \\ x_{21}\, y_1 + x_{22}\, y_2 + \cdots\cdots + x_{2n}\, y_{n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1}\, y_1 + x_{n2}\, y_2 + \cdots\cdots + x_{nn}\, y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

은 적어도 하나의 자명하지 않은 해를 갖는다. 이 y_i에 대해 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}, 0, 0, \cdots)$이라 놓으면 모든 X_i 에 대해 $X_i \cdot Y = 0$ 이고 $Y \in V$, $Y \neq 0$ 이다.

(2차)

1. $e \leq x \leq y$, $0 \leq p \leq q$ 이고 $\dfrac{y}{x} \leq \dfrac{q}{p}$일 때 $y^p \leq x^q$ 임을 보여라.

풀이

$f(x) = x - \log x - 1$ $(x \geq 1)$이라면 $f(1) = 0$ 이고

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0$ 따라서 $x \geq 1$이면 $x \geq \log x + 1$ 이다.

또 $q \geq p \log \dfrac{q}{p} e$ 이다.

$g(x) = q \log x - p \log y$라 하면 $g(x) \geq q \log x - p \log \dfrac{q}{p} x$ 이다.

$h(x) = q \log x - p \log \dfrac{q}{p} x$ 라 놓으면 $h(e) = q - p \log \dfrac{q}{p} e \geq 0$

이고 $h'(x) = \dfrac{1}{x}(q-p) \geq 0$ 이다. 따라서 $x \geq e$에 대해

$h(x) \geq 0$ 이고 즉 $g(x) \geq 0$ 이다. 따라서 $x^q \geq y^p$ 이다.

2. 다음 행렬식의 값을 구해라

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \cdots\cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & a_2 a_3 & \cdots\cdots & a_2 a_n \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & 1+a_3^2 & \cdots\cdots & a_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & a_n a_3 & \cdots\cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

풀이

$a_1 \neq 0$ 이라 하자. 그러면

$$준식 = a_1^2 \begin{vmatrix} 1+a_1^{-2} & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_n \\ a_2 & 1+a_2^2 & a_2 a_3 & \cdots\cdots & a_2 a_n \\ a_3 & a_3 a_2 & 1+a_3^2 & \cdots\cdots & a_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n a_2 & a_n a_3 & \cdots\cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^2 \begin{vmatrix} a_1^{-2}+1 & -a_2 a_1^{-2} & -a_3 a_1^{-2} & \cdots\cdots & -a_n a_1^{-2} \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 1+a_1^2 & -a_2 & -a_3 & \cdots\cdots & -a_n \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \ 1+a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2$$

이 식은 $a_1 = 0$ 일 때도 성립한다.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$ 의 값을 구하여라.

풀이

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan\theta}\ d\theta$, $\tan\theta = t$ 라 놓으면

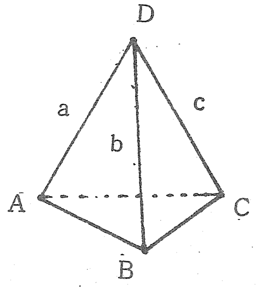
$I = \int_0^1 \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$. $\sqrt{t} = u$ 라 놓으면

$I = \int_0^1 \dfrac{2u^2}{1+u^4}\, du$.

한편 $\int \dfrac{x^2}{1+x^4}\, dx = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \left[\dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} \right) + \tan^{-1} \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right]$ 이므로

$I = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \left(\log(3-2\sqrt{2}) + \dfrac{\pi}{2} \right)$ 이다.

4. 사면체 $ABCD$에서 꼭지점 A와 마주보는 면의 면적을 α, B와 마주보는 면의 면적을 β, C와 마주보는 면의 면적을 γ, D와 마주보는 면의 면적을 δ라 하자. D를 지나는 각 모서리들이 D에서 수직으로 만날 때 $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 임을 보여라.



풀이

$\overline{AD} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{CD} = c$ 라 놓으면

$\alpha = \dfrac{1}{2} bc$, $\beta = \dfrac{1}{2} ca$, $c = \dfrac{1}{2} ba$.

이때 $a' = \overline{AC} = \sqrt{c^2+a^2}$, $b' = \overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2}$,

$c' = \overline{BC} = \sqrt{b^2+c^2}$

헤론의 공식 $S=\sqrt{s(s-a')(s-b')(s-c')}$, $s=\dfrac{a'+b'+c'}{2}$ 을 쓰면

$\delta^2 = s(s-a')(s-b')(s-c')$ 에서

$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 이 유도된다.

5. $a_i > 0$, $c_j > 0$ 일 때 다음을 증명하여라

(1) $(a_1a_2 \cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le (c_1c_2 \cdots\cdots c_n)^{-\frac{1}{n}} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k c_k$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1a_2 \cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

풀이

(1) 산술평균과 기하평균의 관계에서

$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots\cdots + a_nc_n \ge n \sqrt[n]{(a_1c_1)\cdots(a_nc_n)}$ 이므로

$(a_1a_2 \cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le (c_1c_2 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}} \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$ 이다.

(2) $c_k = \dfrac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$ 라 놓으면

(1)에 의해

$$(a_1a_2 \cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le \left\{\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2}\cdot\frac{4^3}{3^2} \cdots\cdots \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right\}^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$$

따라서 $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1a_2 \cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \left(\sum_{u=k}^{\infty} \frac{1}{u(u+1)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\le e \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

<참 고 문 헌>

1. 線型代數；高麗大學校 出版部
2. Rudin, Walter ; Principles of Mathematical Analysis, 3 rd, 1976, McGraw-Hill.
3. Beyer, W. H ; CRC standard Mathematical Tables. 27 th, 1981, CRC.
4. Greitzer, S. L ; International Mathematical Olympiads 1959 — 1977, 1978, MAA.
5. Rapaport, Elvira ; Hungarian Problem Book Ⅱ. 1963, MAA.
6. Lang, Serge ; Linear Algebra, 1970, 2 nd.
7. 월간수학세계 ; 1982, 10월호, 성지사
8. 월간수학세계 ; 1983, 10월호, 성지사
9. Hillman, A, P : The William Lowell Putnam Mathematical Competetion, Amer. Math. Monthly. Vol. 81. pp.1086 ～1095.
10. Sigma ; 경희대학교 문리과대학 수학과 학회지, 1985. 2호.

☞

Solve the following problems. (I)

1. Evaluate the following integral exactly :

$$\int_0^1 ln(1+x)\, ln(1-x)\, dx$$

2. Let S be a semigroup in which, for some fixed integer $k \geq 1$, $x^{k+1} = x$ and $xy^k x = yx^k y$ for all x, y in S. Show that S is commutative.

3. Let σ be a permutation of the digits $0, 1, 2, \cdots\cdots, 9$. Let f be a function $[0, 1) \to [0, 1]$ where $f(x)$ is obtained from x by applying σ to each digit (except the integral part) in the decimal expansion of x.
i.e., if $x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots$ for $0 \leq a_i \leq 9$, $f(x) = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots\cdots$ where $b_i = \sigma(a_i)$.
(a) Is f continuous ?
(b) Is f differentiable ?
(c) Does $\int_0^1 f(x)\,dx$ exist ? If so, compute the integral (Rieman integral.).

4. Let $S_1, \cdots\cdots, S_k$ be a list off all non-empty subsets of $\{1, \cdots\cdots, n\}$. Thus $k = 2^n - 1$. Let $a_{ij} = 0$ if $S_i \cap S_i = \phi$ and $a_{ij} = 1$ otherwise. Show that $A = (a_{ij})$ is non-singular matrix.

5. Prove that $\sin^2 x < \sin(x^2)$ if $0 < x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Solve the following problems. (Ⅱ)

1. When 4444^{4444} is written in decimal expansion, the sum of its digits is A. Let B be the sum of the digits of A. Find the sum of the digits of B. (A and B are written in decimal expansion).

2. For $\xi = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, set $A = A(\xi) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$ where

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

and let $\Gamma = \Gamma(\xi)$ be any positive oriented closed curve eclosing the eigenvalues of $A(\xi)$.
Evaluate the following formula where B is any 4×4 matrix.

$$I(B) = \int_{R^3} \oint_{\Gamma} \operatorname{tr} \{(\lambda - A)^{-1} [B(\lambda - A)^{-1}]^3 \lambda e^{-\lambda^2} d\lambda\, d\xi .$$

3. Find the limit of following sequence.

$$\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{3}{4}\right),\ \frac{(1/2)/(3/4)}{(5/6)/(7/8)},\ \left[\begin{matrix}\left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{3}{4}\right) \\ \left(\frac{5}{6}\right)/\left(\frac{7}{8}\right)\end{matrix}\right] \Bigg/ \left[\begin{matrix}\left(\frac{9}{10}\right)/\left(\frac{11}{12}\right) \\ \left(\frac{13}{14}\right)/\left(\frac{15}{16}\right)\end{matrix}\right],\ \cdots\cdots$$

4. Solve the following diophantine equation.

$1!3!5! \cdots\cdots (2n-1)! = m!$

5. Let $I_1 = \int_0^1 {x_1}^{x_1} dx_1$, $I_r = \int_0^1 \int_0^1 \cdots\cdots \int_0^1 (x_1 x_2 \cdots x_r)^{(x_1 x_2 \cdots x_r)} dx_1 dx_2 \cdots dx_r$

Show that

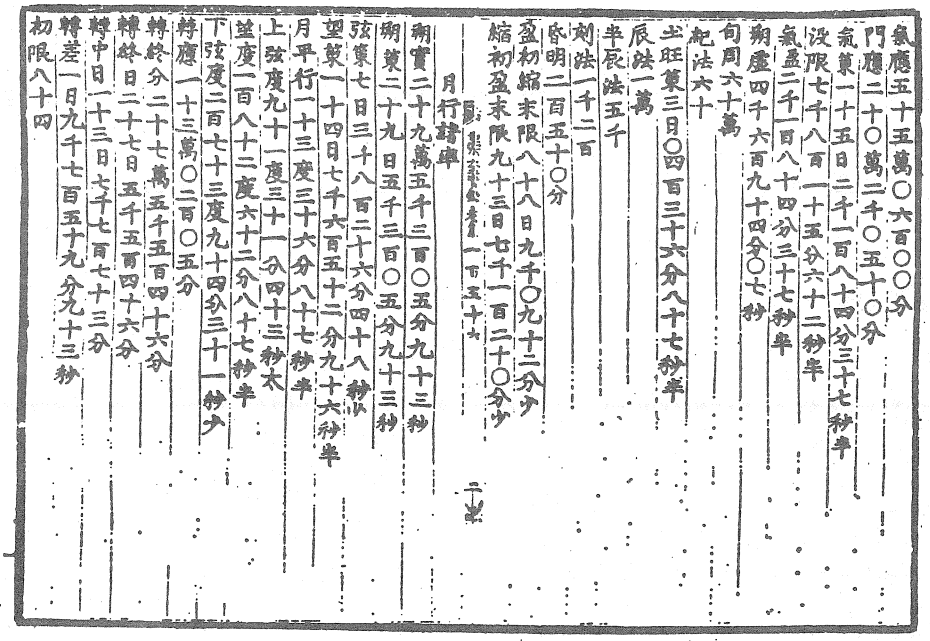
① $I_1 = I_2 < I_3 < I_4 < \cdots\cdots$,

② $\lim_{r \to \infty} I_r = 1$.

(Remark ; $I_1 \fallingdotseq 0.78343051 \cdots\cdots$)

발자욱

□한국의 수학사



氣應五十五萬〇六百〇〇分
門應二十〇萬二千〇五十〇分
氣策一十五日二千一百八十四分三十七秒半
沒限七千八百一十五分六十二秒半
氣盈二千一百八十四分三十七秒半
朔虛四千六百九十四分〇七秒
旬周六十萬
紀法六十
土王策三日〇四百三十六分八十七秒半
辰法一萬
半辰法五千
刻法一千二百
昏明二百五十〇分
盈初縮末限八十八日九千〇九十二分少
縮初盈末限九十三日七千一百二十〇分少
月行諸率
朔實二十九萬五千三百〇五分九十三秒
朔策二十九日五千三百〇五分九十三秒
弦策七日三千八百二十六分四十八秒少
望策一十四日七千六百五十二分九十六秒半
月平行一十三度三十六分八十七秒半
上弦度九十一度三十一分四十三秒太
望度一百八十二度六十二分八十七秒半
下弦度二百七十三度九十四分三十一秒少
轉應一十三萬〇二百〇五分
轉終分二十七萬五千五百四十六分
轉終日二十七日五千五百四十六分
轉中日一十三日七千七百七十三分
轉差一日九千七百五十九分九十三秒
初限八十四

「七政算內篇」

한국의 수학사

이창희 (85)

Ⅰ. 서 론

數學史의 연구는 대립적인 두 가지 입장으로 크게 나누어 볼 수 있다고 한다. 하나는 數學이 그 지식 체계의 無矛盾과 整合을 중요한 목적으로 삼고 성장하여 왔다는 사실에 주목하여, 數學 내부에서의 개념이나 이론 등의 형성과 발전, 또는 쇠퇴의 이유를 분석하여 그 의미 부여를 시도하는 입장이다. 또 하나는 경제·사회·정치·시대사조 등 수학의 〈문화적 환경〉에 주목하여 수학과 문화 사이의 상호 관계에 관심을 모으는 外的인 數學史의 연구이다.

이러한 수학사의 연구 결과를 대할 때마다 우리는 世界 數學史라는 큰 급류속에 韓國의 數學史는 아예 사장되어 그 그림자도 찾아볼 수 없는 느낌을 받을 때가 있다.

과연 우리 한국의 수학사는 세계 수학사에 등장하지 못할 만큼 빈약했던 것일까 이러한 물음에 대해서 金容局 박사는 그것은 오랜 전통적 관습을 통한 數學的 사고 형식의 차이일 뿐, 수학적 사고 능력의 우위를 가리는 요인은 될 수 없다고 답하고 있다. 단지 현대적인 개념의 수학을 유럽지역 서양인들이 정립해 놓은 까닭에, 동양과 한국인의 數에 대한 전통적 기본 사상이 어울리지 않는 것 뿐이다.

일반적으로 학생들 사이에서도 세계 수학사에 관한 지식 (상식)보다, 한국의 수학사를 더 많이 알고 있는 일은 드문 것 같다.

다음에는 부족하나마 감히 한국 수학사의 내용을 기존의 책을 빌어 간략히 서술하고자 한다. 따라서 중간 중간의 小題目 없이 개괄적으로, 또 시간의 흐름에 따라 요약하겠다.

Ⅱ. 본 론

일반의 역사적 사실이 그러하듯이, 수학의 형식 및 수학의 價値觀 역시 그것이 발생한 곳에서의 자연적 배경 및 환경에 큰 영향을 받았다. 따라서, 한국수학 역시 風土·政治·經濟구조·가치관이 그 배경을 이루었는데, 여기서 풍토 및 정치·경제구조 등을 한국 수학사의 배경으로 제시하는 것은 그만큼 한반도를 비롯한 동양 수학은 그들 배경의 어떤 도전에 대한 응전으로서 발생해 왔고, 그러한 이유

로 유럽의 그것과 큰 차이를 보이기 때문이다. 즉, 유럽에서는 일찍부터 수학을 〈知〉 자체를 위한 학문으로 성립시켜, 〈知〉를 하나의 실존하는 실체로서 인식한 반면, 동양은 수학을 하나의 실용 본위의 수단, 또는 기술로서 중요시하는 실천주의에 입각하고 있다는 관점에서 數를 실제화시키는 서양인의 이상주의와는 날카로운 대극를 이루어 왔다고 볼 수 있다. 어쨌거나 동·서양인을 막론하고 수학은 算數로부터 이루어져 왔다고 볼 수 있고, 한국 수학도 예외없이 數에 대한 수리사상이 그 기저를 이루고 있고, 어쩌면 지금 현대인의 무의식 중에서 우리들의 의식을 지배하고 있는지도 모를 일이다.

그렇다면, 여기서 한국 수리사상의 뼈대를 이룬 고전 중국의 數에 대한 기본사상을 간략히나마 알아보자.

먼저 律曆의 〈數가 곧 天地의 道〉라고 하는 고전 중국의 기본사상은 그대로 한국 수리사상의 뼈대를 이루게 된다. 그러므로, 한국인의 전통적인 數學觀이 무엇이었는지를 알기 위해서 〈한서〉 율력지에 있는 체계화된 數의 思想을 간단히 설명 (요약) 하겠다.

율력지는 율력의 數가 모든 것에 깃든 우주의 지배원리이며 〈數를 헤아린다는 것, 즉 〈算數〉는 우주 만상의 이치에 들어맞는다〉는 기본 명제 밑에 음율·역법·역수·도량형 등을 통합하고 있다. 그러니까, 數는 律·曆·易·度量衡을 하나로 묶는, 이를테면 매개변수의 구실을 하는 셈이다.

易數를 바탕으로 한 數論的 우주 해석은 우선 陰·陽觀의 바탕 위에서 天과 地를 각각 홀수(陽)와 짝수(陰)에 대응시켜 정의하고 있다. 따라서, 한서에 보면 〈天一, 地二, 天三, 地四, ……, 地十〉이라는 귀절을 찾아볼 수 있는데 마지막의 九와 十은 각각 天과 地의 終數라 부르고, 이 두 수의 合인 十九를 우리에게 잘 알려진 19年 7閏法의 메톤주기에 대응시키고 있다. 그 이유는 〈天地의 終數를 합하여 閏法을 얻는 것〉이라고 설명하고 있다. 여기에서도 알 수 있듯이, 律曆紙에서 전개된 數理思想은 數의 본질·존재가 무엇인가를 따지는 유럽적인 수론과는 동떨어진 것이며, 우주의 생성 및 조화 등과 관련된 數의 기능에 관한 것이었다. 한국 수학사의 思想的 저류를 이루었던 것이 바로 이 律曆紙의 數理觀이었다.

중국인의 음양관 및 五行사상 역시 전통적인 수리관을 중요한 기반으로 삼고 있다. 天命思想을 중심으로 음·양의 이원론을 내세운 易이 八卦의 번역원리로서 그것에 대응하는 사물과 그 사물의 생성, 변화 및 人間史의 吉凶·禍福까직를 설명하였다면, 五行說은 우주만물을 水, 火, 木,

金, 土,의 다섯 가지로 유별해서 이 5 요소의 순행과 역행의 과정을 통해 역시 자연 세계와 인간 사회의 변천을 풀이하고 있는 것이다. 중국의 포희씨가 만들었다는 八卦는 지금 태극기에서도 존재하고 있을 만큼, 한국의 수리사상에 큰 영향을 미쳤는데, 이 괘는 陽과 陰, 즉 음효·양효 두 가지를 세 자리에 배열하는 중복순열의 갯수로서 2^3이 되어 모두 8가지, 즉 坤(☷), 艮(☶), 坎(☵), 巽(☴), 震(☳), 離(☲), 兌(☱),乾(☰)을 나타내게 되었고, 이 8가지의 卦를 서로 조합하면 8×8＝64개의 새로운 64괘가 나온다. 여기서 양효(ㅡ)에는 아라비아 숫자 1을, 음효(ㅡㅡ)에는 0을 대치하면 이것이 곧 6자리의 2.진수를 나타내게 되어 있어 일찌기 라이프니쯔가 중국에 파견된 선교사 부베와의 서신 교환을 통해 이러한 사실을 알고 경탄하였다는 것은 유명한 이야기이다.

종합해본다면 이 음·양론이나 오행사상에서 數의 生成論的 기능의 확대로서 온갖 대상을 모두 수에 대응시켜 다섯가지로 구분하는 오행설의 분류법은 자연현상 뿐만 아니라 政治, 社會의 영역까지 적용되고 있는 것을 볼 수 있다. 그 대표적인 예로서 五德終始說이 있다. 이 사상의 영향을 받은 진시황제는 왕조가 주의 〈火德〉에서 〈水德〉으로 이행하였기 때문에, 오행의 순서에 따라 〈水〉에 대응하는 수 6을 중요시 한다는 취지하에 왕관의 길이를 六寸, 一步를 六尺, 御馬의 수를 六馬 등으로 재정한 것이 그것이다.중국의 전통적 수리사상의 기초를 이룬, 이 음·양 오행사상이 고대 한반도에 이식된 이래, 한국인의 관념 세계를 줄곧 강하게 규제해왔던 것이 사실이다.

다음으로 한국 수학사의 기점은 일반적으로 삼국 시대로 보고 있는데, 그 이유는 이 시대에 이르러 율령정치가 시작되었고, 율령정치 아래 관료체제는 두가지 측면에서 수학지식을 필요로 하고 있다. 우선,현실적인 면에서 토지측량, 조세징수, 국고경리 등 행정상의 실무를 수행하기 위해서, 이른바, 정치 算數的 기초가 반드시 요청되지 않을 수 없고 형식적인 면에서는 국가적 권위를 과시하기 위해서 토착사회의 경제구조와는 상관없는 정치 체제의 원형 혹은, 이상적 모델을 충분히 본받아야 하고, 그 과정에서 관용과학으로서의 수학을 현실정치의 필요 이상으로 중요시 해야만 했기 때문이다. 수학상의 실용적 지식이 발전도상에 있는 三國의 토지측량, 과세, 토목, 무역, 수송 등 여러 분야에서 점차로 더 많이 요구된 경향을 보인 것은 당연한 것이다. 이러한 필요성에 따르는 계산술을 뒷받침하는 수학지식의 공급원은 중국 漢代에 엮어진 〈九章算術〉을 중심으로 한 算書 이외에는 없는 것으로 밝혀지고 있다. 구장산술은 이 시대에 있어 토지측

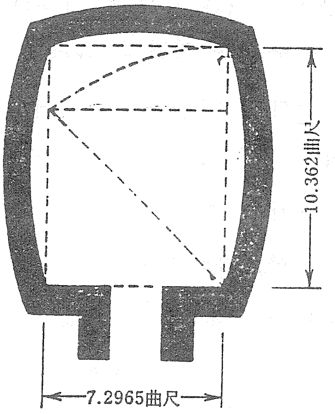
량 및 정치, 경제에 모두 사용되고 있었으나, 그 내용은 토지 측량에 대해서만으로도 간략히 예를 들 수 있다.

〈지금 圓田이 있다. 주위의 길이는 三十步, 직경이 十보라고 할 때 넓이는 얼마인가? 답 : 七十五步〉

〈풀이 : 반원주에 반경을 곱한다.〉

위 예에서 볼 때 삼국 시대까지는 적어도 원주율 π의 값을 정확히 인식하지 못하고 있다는 것을 추측할 수 있다. 이외에도 삼국 및 통일신라의 건축계획에 나타난 數理에 대한 것도 상당량에 이르지만 한가지 단순한 예로서 조선 전기까지의 건축에 대한 수리를 대신하겠다.

삼국 시대의 건축 기술이 상당한 수준에 도달하였음은 많은 사료가 뒷받침하고 있는 사실이지만 오늘날 남아있는 유적조사를 통하여도 건축 양식의 미학적 특성을 충분히 알아낼 수 있다. 고대 한국의 건축 양식에 중요한 영향을 미친 낙랑 시대의 전곽분의 평면도에는 전면의 너비를 일변으로하는 정방형의 대각선의 길이가 측면의 길이와 꼭 일치한다는 사실이 실제 조사를 통해서 밝혀졌다. 이것으로 정방형과 그 대각선을 대응시키는 기하학적 조영 계획이 있었다는 것이 확실하다. 일반적으로 고구려의 고분이나 도성, 궁궐의 평면도는 정방형을 기조로 삼고 있다. 특히 수나라의 도성제를 본받은 고구려 정전제의 방안구분법은 직각의



助王里 69號 塼槨墳의 평면도

작도라는 공법상의 문제를 안고 있는데,당시의 기술자들은 세 변의 비가 3 : 4 : 5 인 직각삼각형의 작도법을 알고 있었음에 틀림없다. 따라서 중국 최고의 고산서의 하나인 〈周髀算經〉에 실려있는 피타고라스 定理의 응용지식은 당시의 천문학자뿐만 아니라 측량기술자에게도 알려져 있었던 것으로 보인다. 그밖의 度•量•衡의 정리 등이 삼국 시대에 이루어졌고, 통일신라에 이르러 비로소 산학 제도가 성립되고 그것을 교수하게 되었다. 이와 같은 것은 〈삼국사기〉의 다음과 같은 글로 알 수 있다.

〈산학박사 또는 조교 한 사람을 두어 三開, 九章, 六章 등을 가르친다. 모든 학생은 대사로부터 무관자에 이르기까지 지위에 관계 없으며, 그 연령은 15세 이상 30세 이하까지를 원칙으로 한다.〉

그리고 이 시대에 이르러 중국의 조충지가 서술한 π의 정밀한 근사값을 도입

해서 가르치게 되지만 그 내용이 너무 어려워서 배우는 사람이 없어졌다는 내용도 있다.

신 라	고 려
「九章」, 「綴術」	「九章」, 「綴術」
「六章」, 「三開」	「謝家」, 「三開」

통일신라 시대의 算書는 거의 변모없이 고려시대까지 지속되고 있다. 위의 표와 같이 算生의 교과서가 그대로 明算科의 出典이었다고 전제한다면, 고려 산학의 교과서 내용은 통일신라 시대와 사실상 별 차이가 없다.

한 가지 덧붙일 것은, 과거의 시험 방법에서 짐작컨데, 산학의 교수 및 학습이 원리의 이해라든지, 응용 능력보다는 산서의 내용을 얼마나 충실히 잘 기억하고 있는지에 거의 전적으로 치중하였다는 점이다. 이것은 암기위주의 전통적인 古典 습득 방법을 과학교육에도 그대로 일률적으로 적용시킨 탓인데, 과학발전의 커다란 저해 요인이 된 이러한 교육 방법은 의외에도 오늘 현재까지 뿌리깊은 전통으로 남아 있다.

다음으로 통일신라 시대의 천문제도에 관하여 수학의 응용을 〈周髀算經〉의 교재를 들어 간단히 설명하겠다.

동양의 수학과 천문학은 발생당시부터 쌍생아적 관계에 있었기 때문에 성장과정에서도 당연히 상호 침투의 경향이 있을 수 밖에 없었다. 따라서 한국 수학사의 한 단면을 천문 제도를 통해서 밝히는 것도 큰 무리는 아니라고 생각한다.

우각박사와 천문박사 등을 임명하였다는 「삼국사기」의 기사로 미루어, 이들 교수직 밑에 우각생, 천문역생을 두는 천문제도가 있었던 것이 분명하지만 그 교육과정에 관한 구체적인 내용은 전혀 알 수 없다. 따라서 역학 관계의 교재가 무엇이었는지도 알 길은 없지만 算經 十書중의 하나이며 동양 천문학자들의 필독서이기도 했던 周髀算經은 신라 천문관의 교육에서도 당연히 기본 교재로 쓰였을 것이다.「주비산경」은 삼각형에 관한 피타고라스 정리를 주제로한 주공과 상고의 대화로부터 그 서장이 시작되고 있다. 중국인의 고전 정신은 이 경우에도 피타고라스 정리의 특수한 예에 지나지 않는 3 : 4 : 5 라는 세변의 비를 天圓地方의 형이상학적 독단론에 결부시키는 것을 잊지 않고 있다. 실례를 든다면 3 : 4 : 5 라는 것을 본 책에서는 다음과 같은 이유로 풀이하고 있다.

〈圓徑이 1이면 圓周는 3이 된다. 方徑을 1로 하면 方周는 4이다. 3을 勾, 4를 股로 하는 이유는 원주, 방주의 3 :4에 대응시키기 위해서이다. 그렇다면 빗변(弦)이 5로 되는 것은 순서로 보아 당연하다.〉

모든 수는 음, 양의 이치에 따라서 양(陽 : 天 즉 圓) 또는 음(地 즉 方)의

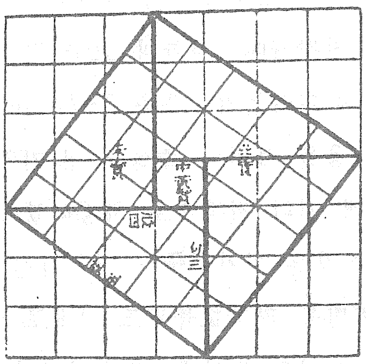
어느 한 쪽에 속해야 한다는 음·양 사상 및 수의 계열성을 엮어놓은 이 주석 역시 원문에 못지 않게 數論을 수학적인 이론이 아닌 전통적인 이데올로기에 결부시키고 있는 것이다. 3과 4를 밑변(勾)과 수선(股)으로 하는 직각삼각형의 빗변(弦)은 〈 $3^2+4^2=5^2$ 〉에서 5를 얻는데 이에 관해서 다음과 같은 응용문제가 실려있다.

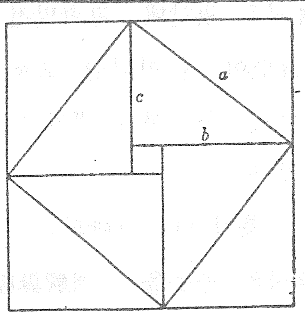
〈노몽의 비(碑)가 서 있는 곳으로부터 태양의 직하, 즉 비(碑)의 그림자가 생기지 않는 곳까지는 6만리이다. 처음의 지점에서 태양직하까지의 거리를 勾, 여기서 태양까지의 높이를 股로 하면, 勾와 股를 각각 제곱하여 합한 값은 개방할 때를 각각 제곱하여 합한 값은 개방할 때 비에서 태양까지의 거리 십만리를 얻는다〉

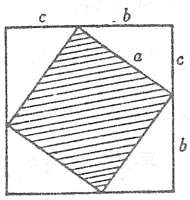
즉 $3^2+4^2=5^2$의 형태를 바탕으로 하여 $6^2+8^2=10^2$을 얻을 수 있다는 것이다. 이 정리는 비단 3:4:5의 비를 이룰 때 뿐만 아니라 일반적인 경우까지 확대될 수 있는데, 다음 문장에서

〈주나라 땅에서 북극까지는 십만 삼천리이고, 북극에서 동짓날에 태양의 직하에 있는 곳까지는 이십 삼만 팔천리이다. 이때 주지에서 태양의 직하에 있는 곳까지의 거리는 이십 일만 사천 오백 오십칠리 반이다.〉 라고 적고 있는데, 이 문제는 3:4:5의 비례식을 이용할 수 없고, 일반적인 피타고라스 정리를 이용하여 수식을 셈하지 않으면 안된다. 그렇다면 피타고라스 정리를 일반적으로 증명해야만 할 것인데, 이 정리를 周髀算經에서는 그때까지의 형이상학적 방법과는 달리 아래 그림에서와 같이 명쾌하게 증명하고 있다. 그러니까, 중국인이 유독 3:4:5의 비례수치에 집착했다고 해서, 피타고라스 정리의 특수한 예밖에 몰랐던 탓은 결코 아니다. 그러나, 중국인이 결코 한국인이 될 수는 없기 때문에 우리로서는 그러한 책을 다루고 있다는 것만으로 그 의의를 찾을 수 밖에 없는 것이다.

弦圖







$$a^2=(b+c)^2-2bc$$
$$=b^2+c^2$$

다음으로 고려시대는 수학적 내용이 빈약하고 연구 결과가 많지 않은 까닭으로 감히 그 시대의 수학 성격 만을 짚고 넘어가야 겠다.

고려 수학의 성격을 크게 둘로 종합해 본다면 첫째, 제도의 내용면에서 신라의 제도를 거의 그대로 답습한 고려의 산학은 처음부터 경직되어 있던 셈이지만 중기 이후에는 수학 연구의 폭이 더욱 좁아져서 학문적인 체제는 찾기 어렵게 된 것으로 보인다. 비록 형식상이나마 국자감에 소속하고 있었던 위치에서 잡과 십학의 하나로 옮겨졌다는 사실은 그나마 학문적인 성격을 인정받았던 산학이 순전히 실천적인 기술로 격하당했음을 뜻한다.학문의 위치에서 탈락되고,그렇다고 아직 기술적인 면에서도 정립되지 못한 과도기적 상태에서 고려의 御用 數學은 점점 정체의 늪에 빠져든 것 같다. 둘째로, 산학가의 연구 활동면에서 볼 때 고려의 산학자는 어쨌던 난해하기로 유명한 綴術을 익힌 당대 최고의 수학적 교양을 갖추고 있었던 것만은 사실이다. 算士는 민간과의 접촉이 차단된 내무직이었으며 특수한 전문 지식의 소유자인데다 동일 업무에 종사하고 수적으로도 극히 제한되어 있었다. 게다가 빈번히 일어나는 권력 구조의 변혁 속에서 특수 기술직으로서의 위치를 계속 유지해 나가야 했던 그들의 처지를 아울러 생각한다면, 수학 지식이 가전적인 것으로 폐쇄되었고 산사들끼리의 이해 공동체, 즉 길드化 및 심지어 산사직의 세습화 경향마저 있었을 것으로 여러 학자들은 짐작하고 있다. 그러나 폐쇄된 사회에 갇힌 지식은 필연적으로 정체하는 법이어서 이러한 상황 아래서 수학상의 어떤 진전이 있었다고는 도저히 생각할 수 없다.

요약하면, 고려의 산학은 통일신라 시대에 비해 실직적으로는 아무런 차이가 없었다. 즉, 신라 이래의 산학을 이어받아 간직하였을 뿐 그 상태를 결코 넘어서지 못했던 것이다. 다만 수학사의 입장에서는 〈산학계몽〉, 〈양휘산법〉,〈상명산법〉 등의 산서를 통해서 이조산학을 준비하였다는 점에서 다소의 의의를 평가할 수 있겠다.

이조 시대에 접어들어 이러한 산서 외에 세종 12년에 제정된 〈오후산〉과 〈지산〉을 더한 5교과가 있었다. 이러한 산서들은 이조시대에 이르러 비로소 고려에 못한 기능을 하게 된다. 이러한 산서 중에는 도량형의 환산법, 算木에 의한 가감승제, 약분 및 비례연산 등이 실려있을 뿐만 아니라 〈양휘산법〉에는 제곱근의 근사치를 구하는 공식까지도 기술되어 있다. 또한 〈산학계몽〉 속에는 연립방정식과 이차방정식의 풀이도 설명하고 있는 것은 놀라운 일이다. 더욱 수준 높은 문제를 든다면

〈지름 삼십 척의 책의 원에 정사각형 3개를 品자 형으로 내접할 때의 일 변의 길이를 구하라〉는 문제도 九章算術의 책에 나타나 있다. 어쨌든 새로이 접어든 조선시대의 정치 기술상의 필요 때문에 산학 진흥 등이 풍부히 일어난 것은 사실이지만 조선시대 학술상의 절정인 실학기까지도 역시 수학을 기술주의에 가깝고, 형이상학적인 수리관에 관해서는 전통의 입장을 존중하여 아무런 내용의 수정은 없었다. 그러나 이조시대의 실학기에 다산 정약용은 형이상학적이고 보편적인 수의 이론과 보통의 수학을 혼동하는 전통적인 수학사상의 오류를 날카롭게 비판하고 있다.

다음으로 실학기 수학의 성격, 즉 실학기의 수학을 부족하나마 전체적으로 전망하고 그 발전 또는 굴절 과정을 약술한 뒤 결론을 끝으로 부족한 글을 마치고저 한다.

16세기 후반부터 싹튼 약 300년에 걸친 실학파의 계몽운동의 특징은 과학기술에 대한 관심이 현저하였다는 점에서도 파악할 수 있다. 특히 이조 문화의 중흥기였다고 일컬어지는 18세기의 영조(1725～1776), 정조(1776～1800)의 文運隆盛의 治世를 맞이하여 적극적인 수학기술 정책의 실현은 曆學·算學·醫學의 기술 관료를 대폭으로 증원한다는 형태로 추진되고 있다.

이러한 시대 환경 속에서 긍지와 의욕을 가득히 자극받은 중인 산학자들이 실무에 관한 技術知 이상의 수학 일반에 관한 연구에 몰두하는 새로운 역사적 전환기에 접어들게 된다. 그리하여 실학기의 수학은 종래에 없었던 대단히 중요한 변역을 몇 겹으로 거치면서 급속도로 성장한다. 그 중에서도 굴직한 단계를 들어보면 다음과 같다.

1. 중인 산학자 사이에서의 의욕적인 수학硏究의 붐 및 저술활동. 예 : 洪正夏 ;「九一集」

2. 실학자 스스로의 수학상의 저술활동. 예 : 洪大容 ;「籌學需用」

3. 이른바 사대부 수학과 중인 수학의 합류. 예 : 南秉吉과 李尙爀의 공동 연구 및 저술활동

4. 유럽 수학에의 접근 및 한국 수학의 독자적 발전의 계기. 예 : 李尙爀 ;「算術管見」

Ⅲ. 결　　론

끝으로 한국 수학의 특징을 아래에 옮겨 놓는다.

1) 한국이 중국 수학의 전통을 따르고 있었던 것은 사실이지만, 그렇다고 중국 수학사의 흐름에 맞추어 그때마다 유행적으로 추종한 것은 결코 아니다. 예를 들어 이조 세종代는 수학을 비롯한 중국계 전통과학이 급성장한 시기로 잘 알려져 있

으나 당시의 중국은 明代의 수학 쇠퇴기에 해당한다. 이러한 사실과 관련시켜 볼 때 이른바 事大思想은 흔히 오해하는 대로 中華勢力의 위압에 의해서 강요된 숭배가 아니라 上古時代의 이상세계에 관한 정통 계승의 질서관념이었다고 해석할 수 있다.

2) 한국 수학을 크게 나누어 士大夫의 교양수학과 관료 조직 속에서 요구된 실용수학의 이원적 구조를 이루고 있었으며, 전자의 형이상학적인 기본 관념과 후자의 실천적인 기능 사이에는 이조말에 이르기까지 뛰어넘을 수 없는 단층이 가로놓여 있었다.

3) 중국이나 일본의 수학사에서 말하는 민간 수학 또는 민간 수학자는 한국의 전통 사회에서는 존재하지 않았다. 한국의 수학자는 어떤 의미로는 거의 예외없이 官學者들이었다.

4) 官營科學의 하나인 算學을 담당하는 하급 기능직 관리 사이에서는 점차로 길드 조직이 이루어졌다. 그리하여 算士制度가 전기간에 걸쳐 꾸준히 계속되었던 이조에서는 세습적인 中人 算學者들 간에, 공고한 공동체가 형성되었다.

5) 이조의 사대부 수학과 중인 수학은 처음에 서로 병행 공존하는 위치에 있었으나 말기에는 합류함으로써 수학 자체의 내부에도 변화를 가져온다.

A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician.

(—KARL WEIERSTRASS—)

Mathematicians are like lovers. … Grant a mathematician the least principle, and he will draw from it a consequence which you must also grant him, and from this consequence another.

(—FONTENELLE—)

[Arithmetic] is one of the oldest branches, perhaps the very oldest branch, of human knowledge; and yet some of its most abstruse secrets lie close to its tritest truths.

(—H. J. S. SMITH—)

한 마 당

□밤하늘이 왜 어두울까
□4·19에 대하여 한마디

밤하늘이 왜 어두울까

이형용(85)

어린 시절에 까만 밤하늘을 수놓는 별들에 대한 추억 하나쯤은 누구나 가지고 있으리라 생각한다.

여기서, 약간 엉뚱하다고 할 수 있는 생각이지만,, 어린 아이들의 천진한 생각이랄 수도 있는 질문.

"밤하늘이 왜 어두울까?"

어쩌면 약간은 장난스럽기도 하지만, 이 문제의 해답에 우리들의 삶이 보장되고 있다는 사실을 알게 되면 재미있을 것이다.

공기가 있음을 당연시하고, 그것의 존재를 의심한 사람은 별로 없었듯이, 밤하늘이 어두운 까닭을 제대로 생각한 사람은 드물었다.

우리가 갖고 있는, 얕은 지식으로 밤하늘이 어두운 이유를 가볍게 살펴보자.

18세기 독일의 천문학자 올베르스가 여기에 대한 세 가지 가설을 세웠다.

첫째, 우주는 무한하다.

둘째, 별의 수는 무한하며 우주에 고르게 분포한다.

세째, 별의 평균 밝기는 어디나 똑같다.

우리가 중학생 정도의 지식을 갖고 생각할 수 있는 가설, 즉 일반적으로 쉽게 이해할 수 있는 우주관이다.

자, 이제 하나씩 생각해 보자.

첫째 가정에서, 우주를, 우리를 중심으로 한 구각(球殼) 단위로 생각해 보는 것이 편리하다. 빛은 거리의 제곱에 반비례하고, 각 구각의 체적은 거리의 제곱에 비례한다. 올베르스의 가설에서, 별은 고르게 평균적 밝기를 갖고 있으므로, 위의 두 가지 사실을 같이 생각하면 결국 각각의 구각은 같은 밝기를 갖게된다.

여기서, 한 가지 생각해야 할 문제가 있다. 뒷 별이 앞 별에 의해 가려지는 문제인데, 이는 쉽게 극복할 수 있다.

둘째 가정에서 별은 무한정이고 고르게 분포하므로, 어느 방향으로라도 별이 보인다는 이야기가 된다.

올베르스의 가설대로라면 우주는 무한하고, 따라서 각 구각의 수도 무한하게 되고 지상에는 엄청난 별빛이 쏟아지고, 이는 태양 밝기의 15만 배 정도 되어 지상에는 생명이 존재할 수가 없게 된다. 올베르스는 우주 공간의 먼지나 가스, 구름이 빛을 흡수한다고 설명했다. 그러나, 우주에는 먼지구름이 존재하지만 가설대로라면, 역시 구름에도 엄청난 빛이 쏟아지게 되어 구름의 온도는 상승, 마침내는

스스로 빛을 내기에 이른다. 결국, 구름은 흡수한 만큼 빛을 내게 되어 마찬가지가 된다.

역시 가설 자체에 문제가 있다는 말이며, 실제로 영국 천문학자인 허셸이 은하계를 발견하면서 별은 은하계만으로 한정되어, 올베르스의 두번째 가설이 어긋남으로 문제는 해결되어 밤하늘이 어두운 이유가 설명이 된 것으로 여겨졌다.

그러나, 20세기에 들어서 올베르스의 두번째 가설은 다시 부활하게 된다.

미국의 천문학자 허블이 은하계 밖의 은하를 발견하게 되었고, 무수히 많은 외부 은하의 존재가 밝혀졌던 것이다. 따라서, 별에 적용했던 올베르스의 가설을 은하에 적용시킬 수 있게 된 것이다. 즉, 그의 가설에서 별을 은하로 대치하면 되는 것이다. 여기에는 특별히 문제되는 것이 없다. 그러나 역시 문제는 해결되지 못한 것이다.

이제, 이 문제를 다른 방면에서 생각해 보자.

천문학자들은 별빛을 스펙트럼으로 연구하여 별의 물리적인 일반 성질을 알아내고 있다.

스펙트럼은 어두운 선이 들어 있게 되는데, 이 어두운 선의 위치는 빛을 내고 있는 물체의 거리가 변하지 않는다면 항상 정해진 곳에 있다.

만약, 그 물체가 우리 쪽으로 다가들면 어두운 선은 보라색쪽으로 이동하게 되고, 물체가 멀어지면 반대로 빨간 색쪽으로 옮아 간다. 우리는 이것이 너무도 유명한 토플러 효과라는 것을 잘 알고 있다.

1910년대에서 1920년대에 걸쳐, 조사된 은하의 스펙트럼에서, 거의 대개의 은하가 우리로부터 멀어지고 있다는 사실이 알려졌다. 그리고, 멀수록 큰 속도로 후퇴한다는 것도 밝혀졌다.

1929년에, 허블은 "허블의 법칙"이라 불리는 법칙을 발표했다. 이것은 은하의 후퇴 속도가 거리에 비례한다는 것이다. 이 법칙이 성립하는 이유는 우주가 팽창하기 때문이라 생각되고, 이는 아인슈타인의 일반 상대론에서 유도된다. 이 팽창이 올베르스의 가설에 영향을 미치게 되는 것이다.

즉 60억 광년 거리에서 빛의 속도의 반으로 후퇴하는 은하가 있다면 120억 광년의 천체는 빛과 같은 속도로 후퇴하고 있는 셈이다. 더 먼 거리는 의미가 없다. 빛의 속도보다 빠른 물체가 있을 수 없기 때문이다. 있다 해도, 그 천체로부터는 어떤 빛도 우리에게 도달할 수가 없다. 결국 위 이야기에서 우주가 유한하다는 것이 되는 것이다. 그 유한 반경은 120억 광년이 되고 1973년 준항성(Quasar)이 발견되었고, 이는 곧 우주의 끝에 위치한 천체인 것이다.

그러나, 이 이야기가 밤하늘이 어두운

이유에 대한 결정적인 해답은 아니다. 아인슈타인의 상대론에서는 은하의 움직이는 속도가 크면 클수록 운동 방향으로 줄어들고 체적이 작아진다. 따라서, 어떤 크기의 범위 내에 그만큼 은하들이 들어가게 되고, 120 광년 안에도 무한히 많은 은하들이 존재하게 되어 두번째 가설은 성립하며, 이것만으로도 밤하늘은 충분히 밝아질 수 있다. 이 때, 우리가 고려할 수 있는 것이 스펙트럼의 이동이다. 스펙트럼의 어두운 선의 이동은 스펙트럼이 전체적으로 이동하기 때문이다. 후퇴하는 물체의 스펙트럼은 붉은 색쪽으로 이동하게 되고, 이는 은하가 정지하고 있을 때보다 에너지가 약해진다.

은하의 속도가 크면 클수록, 즉 멀면 멀수록 우리에게 도달되는 에너지는 줄어들게 되는 것이다.

올베르스의 가설 중 별들이 어디서나 평균적 밝기를 갖는다는 가설이 성립하지 않는 것이다. 우주가 팽창하기 때문에 밤하늘이 어둡게 된 것이다.

만약, 우주가 수축을 시작하면 어찌될까?

우주가 팽창을 멈추면 올베르스의 가설대로 밤하늘은 밝은 빛으로 가득차게 되고 수축이 시작되면서 스펙트럼은 에너지가 높은 쪽으로 이동하게 되고, 우주의 수축이 진행될수록, 온 우주는 수 백만도로 온도가 올라가게 될 것이다. 결국, 우주의 팽창이 멈추는 날, 지상의 생명은 사라지게 되는 것이다.

우리가 별을 보며 감탄하고 시를 읊을 수 있는 것도 우주가 팽창하고 있기 때문이다.

밤하늘을 바라보며, 우리 세대에는 우주의 팽창이 계속되기를 기원해야 하지 않을까?

Mathematics is the tool specially suited for dealing with abstract concepts of any kind and there is no limit to its power in this field. For this reason a book on the new physics, if not purely descriptive of experimental work, must be essentially mathematical.

(P. A. M. DIRAC (Quantum Mechanics, 1930))

4·19에 대하여 한마디

인간이해반

선 언 문

친애하는 학생동지 여러분!

한마디로 대학은 반항과 자유의 표상이다. 이제 질식할 듯한 기성독재의 최후적 발악은 바야흐로 전체 국민의 생명과 자유를 위협하고 있다. 그러기에 역사의 생생한 증언자적 사명을 띤 우리들 청년학도는 이 이상 역류하는 피의 분노를 억제할 수 없다. 만약 이 같은 극단의 악덕과 패륜을 포용하고 있는 이 탁류의 역사를 정화시키지 못한다면 우리는 후세의 영원한 저주를 면치 못하리라 — . 말할 나위도 없이 학생이 상아탑에 안주치 못하고 대 사회 투쟁에 참여해야만 하는 오늘의 20대는 확실히 불행한 세대이다. 그러나 동족의 손으로 동족의 피를 뽑고있는 이 악랄한 현실을 방관하랴 —

존경하는 학생 동지 여러분!

우리 고대는 과거 일제하에서는 항일투쟁의 총본산이었으며, 해방 후에는 인간의 자유와 존엄을 사수하기 위하여 멸공전선의 전위적 대열에 섰으나, 오늘은 진정한 민주이념의 쟁취를 위한 반항의 봉화를 높이 들어야 하겠다.

우리들은 청년학도만이 진정한 민주역사 창조의 역군이 될 수 있음을 명심하여 총궐기하자.

4293 년 4 월 18 일

고려대학교 학생 일동

4월운동*은 구한말 갑오농민 전쟁과 의병운동 및 일제하 반제 민족해방운동의 정통성을 이어받은 민족운동사의 대변혁이다. 갑오농민 전쟁은 제국주의 열강의 침략과 봉건권력의 수탈강화에 의한 민족적, 계급적 모순의 격화에 따른 광범위한 민중의 생존권쟁취투쟁으로서 민족운동의 첫발이었다. 이러한 민족운동이 일제하 항일민족해방투쟁으로 형태전환하여 반제투쟁의 운동발판을 굳게하였다. 그러나 해방후 민족은 남북분단을 전제로 하는 외세의 개입으로 민족의 자주권은 또다시 상실되었으며, 이에 대한 극복과정으로서의 독재에 대한 민주운동의 전개과정과 분단시대를 극복하려는 반외세 민족통일 운동이 4월운동이었다. 이는 동시에 선진자본의 자기모순이 제국주의로 외화되면서 필연적 이윤추구의 장으로서 요구된 식민지 쟁탈사 속에서 나타난 피억압 민족의 저항이

전후 격동기의 한반도에서 극명하게 표출된 반외세 민족운동인 것이다.

1960년 2월부터 4월에 걸쳐 전개된 학생을 중심으로 한 이 4월운동은 이승만 정권 말기의 사회·경제적 위기상황을 배경으로 하여 나왔다. 즉 전후 세계경제의 재편성으로 조성된 호경기와 한국전쟁 및 베트남전쟁으로 지속된 고원(高援)경기는 미국으로 하여금 과다한 대외진출을 요구받게하고, 이의 결과로서 만성적 인플레를 초래했다. 이것은 견디다 못해 1957년 대공황이 발생하고 이를 해결하기위해 미국은 대외 무상 원조를 대폭적으로 삭감했다. 이에 따라 미국의 지위는 약화되고 바로 이때 냉전 및 위선적인 원조체제에 시달려왔던 제3세계 민중의 거센 반발이 일어나게 됐던 것이다. 특히 한국내에서는 원조가 삭감되자, 그 전부터의 경제가 오로지 원조 하나에 매달려 지탱되고 있었으므로, 한국 경제 구조 전체가 위기에 빠져버리지 않을 수 없었다. 따라서 경제적 모순과 더불어 정치적 모순의 심화는 깊어져 가고, 정치적·경제적으로 대미의존적, 대일종속적 성격이 확립되어 가는 과정으로 전개됐다. 이러한 제 모순의 심화과정은 4월운동이 전개되는 계기로 작용하여, 반독재, 반외세, 민족통일의 이념을 실현화시켰고, 이는 그 당시의 전후에 일어난 중남미의 민족해방운동, 베트남의 고 딘 디엠 축출, 터어키 혁명등과 함께 선진자본국의 내부모순이 외부로 전가되어 제3세계 민중이 거센 반발로 맞서게 되는 것과 그 역사적범주를 같이한다.

이렇게 4.19 직전까지의 한국경제는 미국 중심의 세계자본주의 체제에 편입되면서 식민지 反봉건성을 청산하지 못한 채 관료매판자본을 비대하게 하고 대미 종속화를 심화시킴으로써 야기된 국민생활의 피폐였다고 말할 수 있다. 또한 강대국들의 냉전논리의 전개는 한반도에 있어서 종속과 분단을 가져오게 했고 이 과정에서, 반공 이데올로기로써 자신들의 이익을 찾은 이승만, 한민당등 부일 반민족세력은 그들의 반민족성을 은폐하기 위하여 진정한 민족주의 세력을 거세해 나가면서 종속으로부터 민족민중해방이라는 민족의 기본과제를 왜곡, 억압적 정치구조의 유지를 꾀했고 이 과정에서 냉전 속의 외세논리는 민중에게 강요, 세뇌되어 갔다.

또한 이미 56년의 정·부통령 선거에서 이승만 후보는 5백4만여표, 진보당의 조봉암은 2백16만여표를 획득해 표면상으로는 열세였지만 조후보의 부상은 괄목할 만한 것이었으며, 조봉암은 일약 이정권의 장기집권에 제동세력으로 등장함으로써 민심은 이정권으로부터 떠나기 시작했다.

이러한 정치·경제적 위기 속에서 이정권은 민중의 저항을 탄압하기 위해 경찰,

관료기구, 반공청년당 등의 민간단체를 포함한 폭력장치의 강화, 신국가보안법 등의 악법과 진보당의 해산, 조봉암 처형, 경향신문 폐간등 폭력적 탄압을 자행했다.

1960년의 선거에서도 자유당 경북도당에 의한 장면 민주당 대통령 후보의 선거유세 방해공작은 고교생들까지 불러들이는 결과를 낳았다. 4월운동의 시발점이라고 할 수 있는 2•28 대구 경북고교 학생들의 가두시위가 바로 그것이다. 2월 28일, 그날이 일요일이었음에도 불구하고 등교를 강요받자 이의 부정과 비리를 직감적으로 인식한 대구 경북고교생들은 반대구호를 외치며 가두시위를 벌였다. 이들은 「학원의 탈정치」를 주장하였고 3월 15일의 투표일이 가까워질수록 데모의 성격이 점차로 정치적 양상을 띠면서 변화해 갔다. 즉 3•15 부정선거가 민중의 요구를 외면한 자유당 정권 야욕으로 드러나자, 부정선거의 무효에 촛점을 둔 항의운동이 마산시를 중심으로 시민의 합류형태로 평화적이고 질서있게 전개되었다. 평화시위에도 불구하고, 시위당시 실종되었던 김주열군이 몸에 총알이 박힌 채 마산시 앞바다에 싸늘한 시체로 모습을 드러내자, 이에 격분한 시민과 학생들은 反정부구호를 외치며 시위를 계속했다. 이러한 열기는 서울에 있는 대학생들에게도 파급되어 급기야는 혁명에로의 변혁을 가져다 줄 수 있는 계기를 만들어 주었다. 국민의 주권을 유린하는 부정탄압선거에 항의하는 주권자에 대한 정부의 무자비한 탄압은 국민적 차원의 분노를 폭발시켜 폭력사태로까지 확대되고 4•18 고대생 데모를 필두로 기존체제의 급진적 개혁의 방향으로 급선회했다.

4•18 고려대 데모의 시작은 전국적 시위의 계기를 마련해 주었다. 이날 시위대는 국회의사당 앞에서 연좌농성을 벌이며 "부정선거 해명하라"는 구호를 외치며 다음과 같은 결의문을 채택했다.

결 의 문

1. 행정부는 대학의 자유를 보장하라.
2. 행정부는 이 이상 민족의 체면을 망치지 말고 무능정치, 부패정치, 야만정치, 독재정치, 몽둥이 정치, 살인정치를 집어치우라.
3. 행정부는 명실상부한 민주정치를 실천하라.
4. 행정부는 이 이상 우리나라를 세계적 후진국가로 만들지 말라.

행정부의 책임자가 나올 때까지 계속 농성한다.

학생들은 당시의 고려대 총장이었던 유진오 박사의 설득으로 저녁 늦게 해산하면서 다시 채택한 결의문은 다음과 같다.

결 의 문

1. 국민의 권리와 자유가 짓밟힌 오늘 하늘과 땅이 분노하고 있으며, 불법·공갈·협박·사기의 3·15 선거에 울분한 마산시민의 애처로운 그 참극상을 주권국민인 우리는 보고만 있을 수 없다.

2. 궐기하라. 애국동포여, 36년을 두고 피흘려 전취한 우리 민주주의가 지금 몽둥이와 총검 앞에서 피흘리며 애소하는 저 구슬픈 소리를 우리는 듣고 있지 않는가. 민족을 위한다는 위정자들이여, 그대들의 이름은 부귀요, 영화이며, 몰인정한 위선자라고 우리 국민은 모두가 분노하고 있다.

3. 집권당 위정자여, 그대들이 떼어버렸던 양심을 다시 찾지 않으려는가. 지금 거국적인 민중궐기의 피끓는 이 호소를 듣고 어서 양심을 다시 찾아 민권수호에 목숨 바친 지하에 계신 선열과, 시달리고 통곡하는 우리 국민 앞에 늦지 않았으니 어서 사과하라.

4. 우리는 지금도 용서하여 줄 용의가 있다. 같은 핏줄기의 단군의 자손이기에 동포여 어서 일어나 집권당의 사과를 들어보자.

해산한 시위대가 종로에 접어들었을때 정치깡패들에 의해 습격을 받아 다수의 사상자가 발생하였다. 다음날 고려대 데모대의 상보(詳報)와 깡패들의 데모대 습격보도는 시민과 대학생들을 격분시켜 전국적인 대규모의 시위를 일으켰다.

격 문

여기 대학의 양심을 증언한다. 우리는 보다 안타까이 조국을 사랑하기에, 보다 조국의 운명을 염려한다 우리는 공산당과의 투쟁에서 피를 흘려온 것처럼 우리는 또한 사이비 민주주의 독재를 배격한다.조국에의 사랑과 염원이 맹목적 분격에 흐를까 우리는 얼마나 참아왔는가.

보라! 갖가지의 부정과 사회악이 민족적 정기의 심판을 받을 때는 왔다. 이제 우리는 대학의 엄연한 양심으로 일어나노니 총칼로 저지말라. 우리는 살아 있다. 동포의 무참한 살상앞에 안일만을 탐할소냐! 한숨만 쉴소냐!

학도여! 우리 모두 정의를 위하여 총궐기하자.

이 격문은 4월 19일 오후 진명여고 강당 앞에서 대학 연합데모대가 채택한 것이다.

그러나 이에 대해 정부가 비상계엄을 선포함으로써 데모의 열기는 주춤하게 되지만 25일 교수님들의 가두시위는 운동의 열기를 그 전보다 더욱 가열시키게 되

어 마침내 26일 13년간의 이승만 독재에 종지부를 찍었다.

이러한 4월운동은 과제를 완수하지 못한 채 5·16 군사쿠데타에 의해서 좌절되었다. 그러나 4월운동은 우리 민족운동사의 하나의 획을 그었던 바 우선 운동과정을 통하여 민중들은 자신들이 역사의 주체라는 점을 뚜렷이 인식하고 행동하게 되었으며 그러한 인식과 행동을 통하여 자신들의 실천적 행동을 제약하던 제요소를 극복, 앞으로의 과정에서는 주체로서만이 아니라 운동의 직접적 담당층으로까지 역할하게 되는 계기를 마련하였다.

따라서 4월운동은 그 자체로서 많은 한계를 가지고 있었음에도 불구하고 전체적인 한국민중운동의 발전과정에서 하나의 커다란 계기적 의미를 가진다. 그리하여 60,70년대의 민중운동의 성장은 민중들이 운동의 직접적 담당층으로 대두하게 되는 과정이며 이 과정을 통하여 4월운동에서 나타났던 자신들의 한계를 극복하고, 새로운 단계로 나아가게 된 것이다. 이러한 진전은 주체적 역량을 성숙시키는 과정이며 현재의 객관적 조건의 성숙과 아울러 앞으로의 한국 사회의 기본운동의 흐름을 규정지워 주었다.

＊혹자는 4월혁명, 또 다른 사람은 4·19의거라고 부르고 있으나 두 명칭 모두 잘못된 것이라 생각하고 4월운동이라 규정한다.

〈 참고문헌 〉

1. 상황과 인식, 대학생글모음, 거름.
2. 한국경제의 전개과정, 돌베게.
3. 4월혁명, 대학생논문집, 청사.
4. 4월혁명론, 일월서각.
5. 1960년대, 김성환 외, 거름.
6. 4월혁명론, 강만길 외, 한길사.

革命

조개껍질의 붉고 푸른 무늬는
몇 천년을 혼자서 용솟음치던
바다의 바다의 소망이리라.

가지가 찢어지게 열리는 꽃은
날이날마다 여기 와 소곤대던
바람의 바람의 소망이리라.

아! 이 검붉은 懲役의 땅 위에
洪水와 같이 몰려오는 革命은
오랜 하늘의 소망이리라.

— 서 정 주 —

문예란

—시—

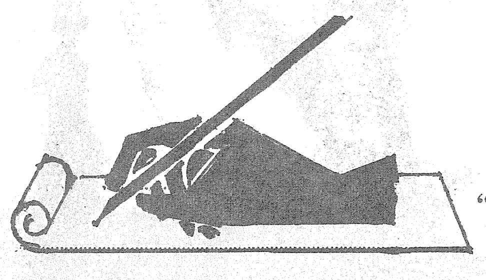
○비의 소묘
○진달래
○화 제
○안개비의 여운

—수필—

○수학과에 들어온 나의 소감
○한 학기를 보내며
○길
○無題

—소설—

○안개에 둘러 싸이어



"茶는 강릉행 고속버스를 타고……"

비의 소묘

최윤서 (85)

꽂보다
더 여리고 가느다란 숨결
그게
나의 전부였다.

차라리
이곳을
생각해 보지도 말 것을

내한몸
애써 잘게 부수고
단숨에
달려왔지만은

더러는
움푹 고인 웅덩이에

더러는
뜨거운 아스팔트 길위에

잊혀져가는
머언 울림으로 ——

그게 나의 전부였다.

진달래

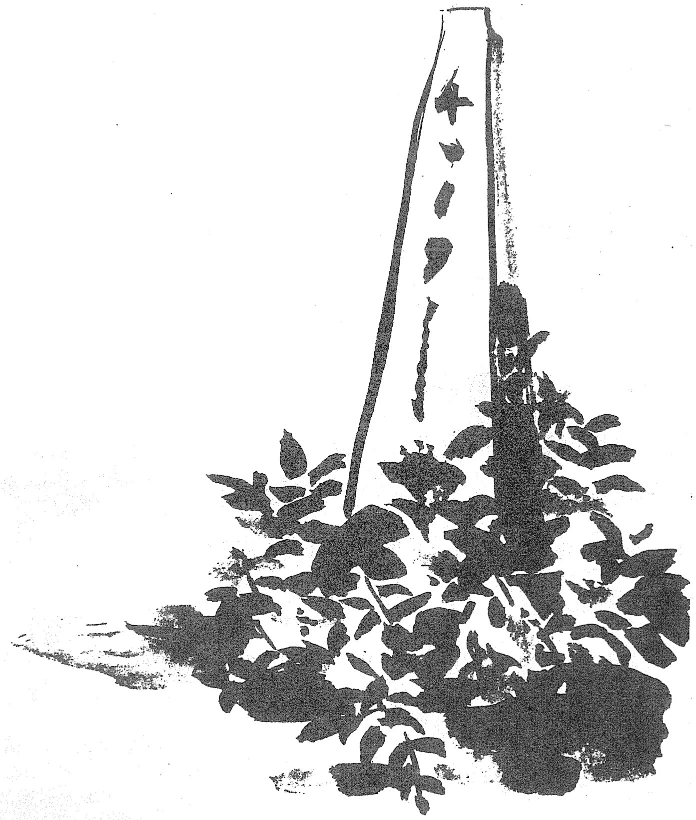
이도성 (85)

피거름 위에 피어나는
4月의 진달래는
다시금
또 한번의 복수를
잉태하는 것일까!

그들은
뱀처럼 또아리 틀어
독이빨 세우고
물어 뜯긴 우리 상처엔
피고름 흐르지만

새살 돋아 오를
그날의 환희에
진달래는
저토록 불타오르는 것일까
우리 가슴에
복수의 씨앗은
뿌려지는 것일까!

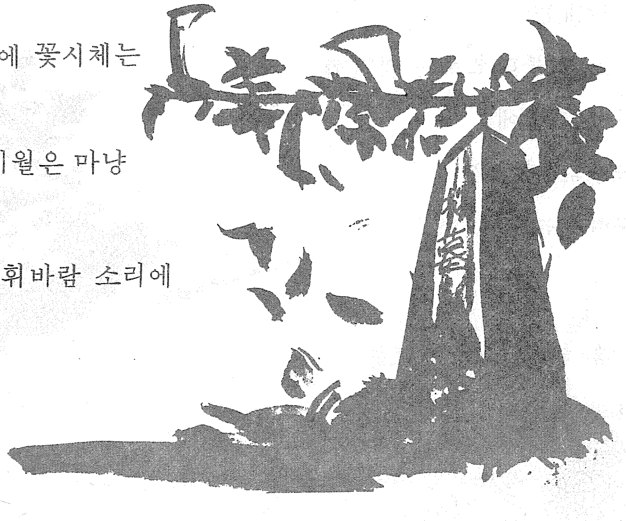
자유 향해 피어 오르는
피의 몸짓이여!



화 제

이창희(85)

수천의 나비떼로 꽃이 진다.
화사한 흔들림은 어제의 추억으로 간직한 채,
빗줄에 물들어진 꽃잎 새로 세월은 얹혀
두터운 참회를 일깨운다.
저기 붉은 피로 또 한 잎의 낙화 ……
한 잎 두 잎 저승의 가락으로 분분히 나부낀다.
내가 너를 안아주랴, 네가 나를 안아주랴.
이겨진 꽃잎 위로 거부하듯 몸을 가로하고,
원생(原生)을 그리워하며 차옥차옥 묻혀 간다.
같이 피온 꽃은 아니언, 질 때는 함께 죽으련.
순간인가,
대지의 화묘(花墓) 우로 일제히 싸려지는
꽃잎의 넋, 뿌려지는 꽃상여, 처참히 자결한
꽃 무더기로 한 꽃새로 피었만은
꽃 불에 떨어진 가을 서리에 차머,
그리움도 겨울로 향한단다.
이제, 가야지 장송곡 흘리는 빗물에 꽃시체는
떠가야지.
저기, 아직 한 꽃 피어 님 땜에 세월은 마냥
뚧기만한갑고
꽃 벌어진 그리움 뒤안으론 멀리 휘바람 소리에
키작은 젊음이 죽어져간다.
1999 9 9 9 ,
아흔 아홉. 하나. 양……



안개비의 여운

이선규 (84)

뽀얀 안개 속을

강뚝 건너 밀려오는 알 수 없는 님의 입김에

그리운 얼굴들을 생각하며

하염없이 걷고만 싶다.

희미한, 보이지 않는 나만의 길을

홀로서

상념을 떨쳐버린 가엾은 마음으로

가벼운 빗방울의 白氣를 맞이하며

한순간의 가벼운 미소로 모든 것을 잊고만 싶다.

끝을 알 수 없는 곳.

바람에 밀리어 한없이

외로운 방랑길을 계속하고 있다.

단지,

생각나는 孤를 벗삼아

천천히, 아주 천천히 흘러가고 있다.

그리움의 여운만 남긴채.

수학과에 들어온 나의소감

전윤호 (86)

人間이 이 세상에 나타나면서부터 가장 먼저 만든 學問은 哲學이다. 수 많은 哲學중에서 피타고라스는 數의 개념으로 자연의 법칙들을 해석하려고 하는 수의 철학을 전개하기도 했었다. 그 후, 많은 철학자들은 수학의 논리성을 중시하여 수학을 많이 발전시켰다.

국민학교부터 지금까지 수학은 나에게 있어 무언가 깨끗한 이미지를 주고 있다. 그 이유는 그 학문의 체계가 철학적이고 논리적이라는 즉 한 치의 오차도 없는 명확한 답을 주기 때문에 좋아하게 되었다. 자신의 학문을 닦을 수 있는 대학에 와서 나는 서슴없이 이 수학이라는 학문을 택할 수 있었고, 이 학과에 몸을 담은지 한 학기 동안에 무언가 수학의 뿌리에 도전해 보고자 하는 강렬한 욕구와 의욕을 느낄 수 있었던 것 같다. 이 세계의 근본을 수라고 본 피타고라스의 말과 같이 나는 수학을 통해 자연을 해석할 수도 있고, 모든 자연 과학에 기초가 되는 이 학문에 무언가 자취를 남길 수 있는 사람이 되고 싶다. 우리과 학생들이 모두 그러하듯, 나는 서로 학문의 성장을 도와 주며 노력하는 우리과의 학풍을 계속 유지 발전시켜 高大의 수학과, 한국 아니 세계속의 수학과로의 노력을 경주하고자 한다. 또, 현대 과학의 산물인 Computer 를 이용한 수학의 발전을 시도해 보고 싶다. 人間 哲學의 産物인 數學과 人間 科學의 産物인 Computer 와의 이상적인 조화로 아직 풀지 못한 미래의 방정식들을 풀기 위해 열심히 노력해 보고 싶다.

The infinite ! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.

(− DAVID HILBERT (1921) −)

The notion of infinity is our greatest friend; it is also the greatest enemy of our peace of mind … Weierstrass taught us to believe that we had at last thoroughly tamed and domesticated this unruly element. Such however is not the case; it has broken loose again. Hilbert and Brouwer have set out to tame it once more. For how long? We wonder.

(− JAMES PIERPONT (Bulletin of the American Mathematical Society, 1928))

한 학기를 보내며

최진희 (86)

지금으로부터 5개월 전 나는 대학이라는 사회에 첫 발을 디뎠고, 지금은 그 대지 위에서 뿌리를 내려간다고 하는 것이 옳을 것이다. 처음에 수학과라고 생각했을 때는 굉장히 딱딱할 것이라고 생각했었다. 사실 수학에 큰 흥미를 가진 것도 아니었고, 그래서 어쩌면 한 학기 동안 수업을 게을리한 결과가 되었는지 모른다.

하지만 어느 사회이건 그 사회의 인간관계란 역시 큰 비중을 차지하고, 그 관계야 말로 그 사회의 특색이 되기도 하며, 그 사회의 존재 이유조차 되나 보다.

수학과에 와서 처음에 느낀 것은 선 후배라는 것이 정말 이런 것이었구나 하는 것이었다. 난 여자였고, 더우기 여학교에서 본 선 후배 관계라는 것은 거의 없다고 할 정도로 극히 표면적이고도 극히 일부에 제한된 관계였다. 그런 관계 속에서, 선 후배 사이의 정이라고는 없는 것과 마찬가지였고, 나 역시 아주 조금밖에 느끼지 못했다.

그런데 대학에 와서 가장 크게 느꼈다면 선배님들이 너무도 잘 대해줘서 고맙다는 생각밖에 들지 않는다. 들리는 얘기로는 1학년 때가 가장 좋을 때니 선배들에게 마음껏 뜯어 내고 요구하라고 하던데, 그렇게 하기에는 너무나 미안한 생각이 들었다. 인간 관계는 상호간에 잘하고 또 서로를 아껴줘야 더욱 더 그 사이의 정이 돈독해진다고 한다. 그런 뜻에서 여러 선배님들을 생각하면 어떤 뿌듯함마저 든다. 그러나 유감스럽게도 우리와 교수님과의 관계가 다소 불편한 느낌마저 든다. 단순히 가르치고 배우는 관계라고 규정짓기에는 스스로 자신이 너무 초라해짐을 느낀다. 수학을 공부하는 사람이 그것을 가르쳐주시는 선생님과의 관계가 극히 형식적이고 마는 것은 누구의 탓이라고 해야 할까.

한 학기도 지나 가고 지금은 여름방학이다. 여름방학이 어쩌면 한 학기동안 기다리던 것이었는지 모른다. 그 만큼, 생활이나 생각하는데 있어서 여유를 갖고 싶었음이다. 사실, 학교에 다니면서 나 자신을 포함한 많은 친구들이 갈등을 느끼고 고민하는 것을 많이 보았다. 그 고민을 넘어서 느끼는 자신의 성장함을 생각하기에 앞서 우선 우리 자신에게 필요한 것은 학교 생활의 '의미' 였다. 고3에의 생활이 지금도 끔찍하게 느껴지는 나로서는 학교 생활이 퍽이나 자유스러웠다. 그러나 그 자유는 단순히

몸만 편한 자유가 아닌, 어떤 새로운 의미를 찾아야 하는 책임감과 갈등이 내재된 자유였다. 이 갈등과 고민속에서 중간에 길을 바꿔버린 친구도 있었고, 학교에 나오지 않는 친구도 있었다. 또 한편 묵묵히 자신의 생각대로 열심히 사는 친구들도 있었다. 어느 누구의 생활이 옳다 그르다를 따지기 전에 우리는 너무도 자신의 늪속에 빠져있지 않았나, 한 번쯤 생각해 봐야겠다. 자신의 늪속에 안주하고, 그 속에서 나오려 하지 않았던 것은 아닌가!

우리가 찾으려는 학교생활에 있어서의 의미는 결코 자기 혼자만의 의미는 아닐 것이다. 남과의 관계, 좁게 말하자면, 수학과내 친구, 선배와의 관계속에서 자신과 생활과 자신의 영역에 대한 의미일 것이다. 자신을 타인과 분리시키는 행동 ―무관심―속에 빠지질 않길 정말로 바란다.

많은 친구들이 고향에 내려가고 또 같은 서울에 있으면서도 볼 수 없다. 학교에 있다보면, 때때로 만나는 친구들은 또 다른 친구들을 찾는다. 그럴 때마다 나는 즐거운 생각마저 든다. 서로가 관심을 쏟아주는 것만큼 상대방과 친해질 수 있는 방법은 없는것 같다. 그리고, 나는 이러한 관심이 학년이 높아질수록 무관심으로 변해가질 않길 바란다.

자신이 속한 사회에 소속감을 갖고 그 사회에 자발적으로 참여하는 것은, 개인이나 사회를 위해서도 가장 바람직하다고 한다. 지금, 난 수학과에 속해 있고, 현재 내가 처한 상황하에서 할 수 있는 일이 있다면, 우선 인간관계에 보다 관심을 쏟고 싶다. 최소한 서로가 무관심하여 서로에게 소외되지 않도록, 한 학기동안 친구들, 선배님들의 도움은 정말 너무도 고맙다고 느낀다. 그리고 나 자신도 많이 변했음을 느낀다. 내가 발을 디딘 대지위에 완전히 뿌리를 내리고, 푸른 여름의 녹음을 마음껏 펼치고 싶다.

길

김황일 (86)

흔히 말하기를 요즘 젊은이는 뚜렷한 목표도 없이 되는 대로 적당히 살아 간다고들 한다. 나 역시 젊은 사람의 한 일원이므로 이러한 견해에 대해 확고하게 단언할 수는 없으나, 적어도 소신을 말한다면 半半이라고 말할 수 있겠다. 그러나, 우리들은 이 半에 대해서 결코 만족해서는 안 될 것이다. 그래서, 혹시나 아직도 뚜렷한 목표를 갖지 못한 사람들이 있다면 잠시 발길을 멈추고 다음 글귀를 주목해 보시는 것이 어떨지요.

"각자가 가는 길은 수 백만 가지 길 중의 하나에 불과하다. 그러므로 그 길은 다만 한 개의 길에 불과하다는 사실을 언제나 기억하고 있어야 한다(어떤 길이라도 그 길은 하나의 길일 뿐인 것이다.). 만약 당신이 그 길을 가야 할 필요를 느끼지 않는다면 더 이상 그 길에 머물러 있을 필요가 없다. 당신의 마음속에서 그렇게 해야겠다고 느낀다면, 그 길을 떠나는 것이 당신 자신이나 다른 사람들에게 모욕적인 행위가 되지 않는다.

그러나, 그 길을 계속 가야겠다는 결정에 있어서, 긴 그 길을 떠나야겠다는 두려움이나 사욕이 앞서서는 안된다. 당신에게 다시 경고하거니와 모든 길을 주의깊게, 신중한 생각으로 바라보라. 필요하다고 생각하면 여러 번 시도해 보라. 그런 다음에 당신 자신에게 다음과 같은 질문을 해 보는 것이 유익할 것이다. "이 길에는 정신(heart)이 있는가?" 모든 길은 다 똑같다. 그 길은 어디로도 가는 길이 아니다. 그 길들은 수풀을 뚫고 지나가거나, 수풀 속으로 깊숙히 들어가거나, 아니면 수풀 아래로 지나가는 차이 만을 지니고 있을 뿐이다. 이 길에 과연 정신(heart)이 깃들여 있는가가 유일한 문제가 되는 것이다. 만약 그렇다면, 즉 정신(heart)이 깃들여 있다면 그 길은 좋은 길이다. 그렇지 못하다면 아무 쓸모가 없는 것이다."

이상은 인류학자 카스타네다(castaneda)가, 그가 연구했던 야퀴 인디언에 관해 쓴 「돈쥬앙에 관한 가르침」이라는 책 中에서 돈쥬앙이 한 이야기다. 이것은 단지 유명한 학자의 견해를 떠나 우리 모두에게 필요한, 꼭 한 번쯤 음미해 볼 만

한 것이 아닌가 생각한다. 누구나 그렇듯이 나도 몇 갈래 갈림길에서 방황과 갈등의 나날들을 보낸 적이 있었는데, 그 때 "나는 나의 길을 간다. 당신들이 당신들의 길을 가는 것처럼 나는 나의 길을 간다. 그러나 그 길은 남으로부터 인정받을 수 있는 위대한 양심의 길일 뿐이다."라는 자기 최면으로 스스로를 위로하며 그 고난들과 싸웠다. 그 결과, 나 자신은 별로 내세울 것이 없으나, 이렇게 좋은 집단에서 생활할 수 있게 된 것 같다.

따라서, 어떤 상황이고 어떤 생활의 위치이건 간에 그것에는 자신의 삶이 내재해 있다. 그렇기에 살아갈 만한 가치를 「내 것」으로 내면화할 수 있는 지혜와 용기를 가져야 할 것이다.

아흡 언덕 깊은 곳에 학의 울음 소리도
멀리 여기 들넘어 들리는 걸 어쩌나
물고기가 잠기어 깊은 못에 있지만
때로는 물못가에로 정한 데가 없네그려
저기 저 즐거운 저 동산 위에는
그 좋은 향나무를 심어 두었지만
나무 밑에 낙엽이 흠일세그려
다른 산에 험한 돌이 보기 싫지만
숫돌이 됨직한 좋은 데가 있네그려

아흡 언덕 깊은 곳에 학의 울음 소리도
저 멀리 하늘까지 들리는 걸 어쩌나
물고기가 열은 곳 물못가에도 있지만
때로는 깊은 못에 정한 데가 없네그려。
저기 저 즐거운 저 동산 위에는
그 좋은 향나무를 심어 두었지만
그 밑에 못쓸 돌이 흠일세그려
다른 산에 험한 돌이 보기 싫지만
옥을 갈 수 있는 좋은 데가 있네그려。

— 고시中에서 —

無　　　題

허용도(82)

오늘도 덧 없는 하루가 희미하게 지나 갑니다.

하늘은 엷은 회색으로 젖어 있고 멀리는 서녘 하늘에 노을이 지면서 붉게 타던 구름들이 차츰 잿빛으로 탈색해 갑니다.

어둠의 장막이 온누리를 덮기 시작하였으며, 영롱함으로 수를 놓은 듯한 밤 하늘을 가르는 별빛 속에서 하루를 반성해 봅니다.

爲人謀而 不忠乎, 與朋友交而不信乎, 傳不習乎

「남의 일이라고 적당히 해 버린 일은 없는가, 친구들에게 성실치 못한 태도를 보인적은 없는가, 스승에게서 얻어 들은 것을 실천하는데 게으른 일은 없었는가」

이는 論語의 學而 편에 나오는 귀절로써 허구한 날 어떤 유령을 상대로 계속해 온 내심의 대화에서 탈피하지 못하고 아무런 변화 없이 무거운 침묵속으로 자신을 내동댕이 치는 우리에게는 가슴 깊이 세겨 두어야 할 실천 태도인 것입니다.

밤이 지나면 또 다른 내일이 찾아 오는 것은 자연의 섭리입니다.

허락된 하루의 생을 고상하고 용감하게 살도록 최선을 다하며, 방향 있는 행동아래 부끄럼 없는 人間이 되기 위해 노력하고, 겸손하고 성실한 人間이 되기 위해서 하루하루를 세롭게 여기며 그 속에 생명을 불어 넣기 위해서 가슴 한 귀퉁이를 비우고 보다 큰 용기를 키워서 정직을 불 태우고 내일을 향한 최선 속에서 보람을 찾기로 합시다.

안개에 둘러싸이어

장정환 (84)

余는 강릉행 고속버스를 타고 있었다. 언제부터인가 버스는 영동고속도로를 질주하고 있었으며, 주위의 푸른 숲들이 여름의 정취를 더 한층 발산하고 있었다. 고속도로는 늦장마의 영향으로 안개가 자욱하였다. 余는 안개가 시야를 가린다는 것을 인식하게 되자, 코넌 도일의 「셔얼록 홈즈」에서의 런던거리가 머리에 그려지고 있는 것을 느꼈다. 우중충한 런던거리의 알 수 없는 사건의 연속, 그것은 余의 인식에 어떤 것을 불어넣어 주었다.

차창을 둘러보며 바깥을 구경하던 余의 코 끝에 향수가 풍겨왔다. 그 순간, 옆 좌석에 20代 초반의 한 女子가 있었음을 깨달았다. 그 女는 청바지에 꽃무늬가 그려진 블라우스를 입고 있었는데, 고개를 창쪽으로 돌려서 내내 바깥만을 보고 있었다. 차분히 가라 앉은 듯한 그녀의 옆 얼굴은 수심에 차 있는 듯이 보였으며, 어떻게 보면 표정이 없는 무실존의 도시 女人같아 보였다. 余는 그녀의 조각같은 두상과 성숙한 女人의 향취때문에 왠지 모르게 긴장하고 있었다. 아름다운 여인(女人)에 대한 男子의 본능적인 작용인 것 같았다.

귓가에서는 안내양의 상냥한 목소리가 들리기 시작했다. "…… 여기서부터는 대관령입니다. …… 앞으로 강릉까지의 도착 소요시간은 35분 되겠읍니다."

강릉은 처음으로서, 풍경이 낯설어 보였다. 하지만, 바로 옆이 시외버스 터미날이어서 다음 행선지인 오대산으로 가는데엔 전혀 무리가 없을 듯 싶었다.

그 女는 버스에서 내리자, 곧 Taxi를 잡아 타고 훌쩍 떠나버렸기 때문에 同行의 꿈은 무산되어 버렸다.

오대산은 余에게 있어서 처음 와 보는 곳인데, 서울에서 가까운 데 있고 경치가 그런대로 괜찮게 여겨져서 伏中에 찾아온 것이었다. 기실, 余는 심신이 지쳐 있었다.

大學에 들어오면서부터 처참하게 맛 본 실패감이, 물론 자신의 노력부족 탓이었지만 아직까지도 사라지지 않고 있었다. 이것은 나아가서는 패기를 말살시킴으로써 入學이전의 긍정적 사고관을 부정적 사고관으로 흐르게 하기도 했었다. 그리고 가치관과 현실 인식이 남들과 달라서인지는 몰라도 데모는 해보지도 않았

다. 더군다나 돌과 화염병을 던지는 과격 학생에 대해서는 실망감을 감추지 못했었다. 이제 餘에게 남은 것이라곤 父親이 주신 正直밖에 없었다. 이것도 사방, 육방으로 물어뜯긴지 오래지만 ……. 余는 도서관에서 파묻히고 싶었다. 무엇이든지 그것에 도전해서 붙들고 놓아주고 싶지 않았다. 이것이 余의 大學에서의 진정한 낭만이라 생각했다. 그러나 낭만은 찾아오지 않았다. 아니, 어떤 것이 발목을 꽉 붙잡고 있어서 그것을 찾을 수가 없었다. T.V.에서, 신문에서 보고 듣는 모든 것들이 귀찮아졌다. 위선자들의 가증스런 말장난들이 심장을 죄어오는 것만 같았다. 서울을 탈출하고 싶었다.

시외버스를 타는데 어찌나 사람들이 북적대는지 짜증스러웠지만 꾹 참았다. 버스는 강릉 시내를 벗어나 영동고속도로를 거슬러 올라가고 있었다. 황금피서철이라 그런지 고속도로에는 車가 몹시 붐비고 있었다. 잠시 후 차는 진부에 도착하였다. 余는 이곳에서 시내버스로 갈아타고 월정사로 향하였다. 한 여름에도 이렇게 등산객이 많은 줄 미처 몰랐다. 3, 4년 이전의 서울의 시내버스 풍경과 흡사하였다. 찜통 속의 열기를 차창 밖에서 불어 오는 찬바람으로 식히면서 월정사에 도착하였다. 車에서 내린 후, 주위를 둘러 보았다. 오대산의 精氣가 훌륭해서인지는 몰라도 주변의 나무들은 굵고 키가 컸다. 또한 이들 나무로 해서 월정사의 고풍스러운 분위기가 살아나는 것 같았다. 余는 서서히 배낭을 풀기 시작했다. 버너와 코펠을 꺼내고, 이어 쌀주머니를 끄집어 내었다. 근처에는 산계곡물을 끌어들인 수도가 있었다. 절 옆에 흐르는 냇가에서 밥을 손수 지어 먹으니 밥맛이 새로왔다. 냇가에는 가족끼리 놀러 온 사람들이 많이 있었는데, 싫어보이지 않았으며, 오히려 같은 자연속의 人間임을 느꼈다.

밥을 먹고 나니 여유가 생겼다. 절을 구경하고 싶었다. 이 절에는 유명한 「8각 9층석탑」이 있기 때문이었다. 많은 관광객들이 먼저 와서 절간을 둘러 보고 있었는데, 거의 모두가 끼리 끼리 온 것이었다. 余는 절 한가운데에 있는 8각9층석탑을 물끄러미 쳐다 보았다. 歷史시간마다 달달 외우던 그 「월정사 8각 9층석탑」이 아니던가! 목에 걸고 있던 사진기를 손에 들었다. 그리고는 석탑의 모습을 찍으려고 눈으로 갖다 대려는 순간, 余의 가슴에는 빠알간 불덩이가 치솟았다. 대웅전과 석탑 사이에 한 여자가 서 있었는데, 분명 그 여자는 청바지와 꽃무늬가 그려진 블라우스를 입고 조각같은 얼굴의, 고속버스에서 옆좌석에 탔던 女子였다. 별빛보다 아름다운 눈동자는 마치 싱그럽게 익은 포도알처럼 시

원했고, 우뚝 솟은 콧날은 아름다운 線을 그리며 내려오고, 앵두보다 빨간 입술은 男子의 눈을 한 곳에 머무르게 하였다. 余는 그녀의 모습을 놓치고 싶지 않아서, 재빨리 석탑옆에 그녀의 모습을 넣어 사진을 찍었다. 그녀의 옷차림으로는 등산할 것이라는 예감이 들었으나 余의 처지에서는 더 이상 진도를 나가게 할 궁리가 없었다. 평소에 배짱과 자신이 없었던 놈이 어찌 그런 여자에게 멋진 제안을 할 수 있단 말인가? 하는 수 없이 눈앞의 떡을 남겨둔 채, 베낭을 메고 상원사로 향했다.

아스팔트 길이 아닌 흙길은 전원에 대한 향수를 물씬 풍기게 하였으며, 마음과 몸이 건강해지는 느낌이 들었다. 상원사는 세조의 등창치료로 유명한 절이 아니던가. 단종애사 이후 커다란 종기로 고생하던 세조가 오대산 기슭의 상원사에 기거하면서, 맑은 계곡물로 목욕하여 병을 고쳤다는 얘기가 전해오는 상원사, 이 절에는 세조의 용안이 있다 하는데 한번 구경하고 싶었다. 지나가는 승용차를 비롯한 여러 차량 때문에 흙먼지가 일었으나 꿋꿋이 참으면서 부지런히 걸어 오후 늦게 상원사에 도착할 수 있었다. 9㎞되는 거리를 베낭지고 걸으니 땀이 이마에 송글송글 맺혔다. 매점에 가서 음료수를 사들고는 한번 쭉 들이 마셔댔다. 짜릿한 그맛이 더위와 땀을 앗아가는 듯했다. 잠시동안 쉬고나서 비로봉 쪽으로 올라가려 하니까 그곳 안내원들이 올라 가지 못하게 하였다. 지금 시각에는 등산 금지라는 것이다. 余는 사전준비 지식없이 왔던 자신의 불찰을 질책하였다. 하는 수 없이 3～4㎞ 아래에 있는 야영장으로 힘없이 향했다. 야영장에는 텐트들이 꽤 붐볐다. 余는 두리번거리면서 주위를 살폈으나 텐트 칠 마땅한 장소가 보이지 않았다. 겨우 자투리 땅을 발견하고는 어둠의 불편함을 이겨내면서 텐트를 쳤다. 8시 반 쯤 되었다. 손전등을 들고서 쌀 담은 코펠을 갖고 수돗가로 갔다. 쌀을 깨끗이 씻은 뒤, 텐트로 돌아와서 버너에 불을 붙이고는 코펠을 그 위에 얹었다. 그리고는 감자와 양파, 참치 통조림, 김치 등을 베낭에서 꺼내어, 수돗가에서 찌개 준비를 하였다.

余는 이웃 텐트 친구들보다는 늦었으나, 별을 벗삼아 저녁을 먹었다. 밥을 먹고 나서는 텐트 안을 정리하기 시작했다. 주위에서는 기타소리와 노랫소리가 점점 크게 들리기 시작하더니 사방에서 오락이 행해졌다. 심심하던 차라 余는 드러눕고는 따라 부르기 시작했다. 바위섬, 인생은 미완성, 불씨, 희나리, 상록수,…….., 좋아하는 노래는 거의 다 불러댔다. 11시가 넘자, 다음 날을 위해 잠을 청하였다. 낮에는 버스에 시달리고, 11㎞이상을 걷느라 피곤했지만, 별빛을 눈에 받

으면서 누우니 그렇게 편할 수가 없었다. 自然속의 생활은 역시 건강했다.

어디선가 떠드는 소리가 들렸다. 한참 잔 것 같아 눈을 떴다. 손전등의 불빛으로 시계를 보니 새벽 4시가 아닌가. 저들은 아직까지도 자지 않았단 말인가? 얼른 일어났다. 코펠과 버너를 서둘러 찾고는 라면을 끓였다. 남보다 먼저 비로봉을 정복(?)하기 위한 행동이었다. 余는 걸음을 재촉하였다. 새벽 공기를 마시면서 걷는 것이 그렇게 좋을 수가 없었다. 익숙치 않은 등산화때문에 발이 불편하였지만, 그 정도는 능히 참을 수 있었다. 비로봉 등산길은 무난하게 오를 수 있는 길이었다. 더군다나 베낭을 매지 않아서 별로 힘이 들지 않았다. 오르는 도중에 별다른 경치를 볼 수는 없었으나, 물을 먹는 곳이 있어 목은 마르지 않았다. 한 시간 조금 더 걸려 비로소 비로봉에 올라섰다. 그리 높은 봉우리는 아니었지만,'야호'를 두 세번 외쳤다. 그리고는 재빠른 걸음으로 下山하였다.

야영장에는 10시 경(오전)에 도착하였다. 곧바로 텐트 안에 있는 짐들을 챙기고 나서는 텐트를 치웠다. 베낭을 힘차게 짊어지고는 소금강으로 향하기 시작했다. 소금강은 오대산 국립공원中의 명승지로서 그 기점까지는 야영장에서 18㎞가 조금 넘었다. 가리키는 시각은 1시였다. 몸이 피곤하다는 것을 느끼긴 했지만 끝까지 걷기로 마음 먹었다. 시작되는 길은 돌이 많은 곳으로, 비로봉 등산길 보다는 험했다. 10분정도 계속 올라가고는 1분정도 쉬고 나서 다시 올라갔다. 이마에 땀이 많이 맺히자, 걸음을 멈추고, 땀을 닦으려고 고개를 들었다. 앞에 누군가 올라가고 있는 모습이 보였다. 먼저 출발한 사람이 있었던 것이다. 자세히 보는 순간 소스라치게 놀랐다. 어떤 무서운 것을 보아서 그런 것이 아니라 바로 그 女子를 보았기 때문이다. 청바지에 꽃무늬 블라우스, 틀림 없었다. 우연은 두번 이루어진 것이다. 믿기는 어려웠지만 어쩌면 이것은 행운인지도 모른다는 생각이 갑자기 떠 올랐다. 힘을 내서 올라가려 했으나 다리가 벌써 말을 듣지 않는 것 같았다. 잠시 쉬면서 물을 벌컥벌컥 마셨다. 다시 힘이 솟는 듯했다. 얼마되지 않아서 余는 그녀를 따라 잡을수 있었다. 그녀를 놓치지 않기 위해서 전력을 다해 올라왔기 때문이었다. 그런고로 그녀에게 다가갔을 때에는 숨이 찼다. 이 여자는 정말로 소금강으로 가는 것일까? 이렇게 도시 생활을 많이 한 예쁜여자가, 도저히 믿기지 않는 일이었다. 余는 그녀를 추월하지 않았다. 힘도 없었지만 그럴 마음이 없었다. 무릎이 신통치 않았지만 참을 수 밖에 없었다. '女子도 저렇게 잘 올라가는데, 하물며 남자가 이까짓 쯤이야'. 그런데, 잘 올라가던 그녀

는 갑자기 편평한 바위위에 걸터 앉았다. 쉬려는 모양이었다. '뒤에 남자가 계속 따라 붙으니까 不安해서 따돌리려고 하는 걸까?' 어쨌든 余로서는 그 곳을 지나치는 것이 자연스러울 것 같았다. 그래서 별로 내키지 않는 발걸음을 위로 옮기고 있었는데, 갑자기 뒤에서 가슴을 울리는 소리가 들려왔다.

"좀 쉬었다 가시지요. 山에서 만나는 것도 큰 인연인데, 同行하지 않겠어요? 저는 소금강으로 가는 中인데요."

목소리 또한 그녀의 美 못지 않게 고왔다. 아니, 고운것 보다는 매력적이라는 표현이 어울릴 것이다. 성량, 어감 모두가 매혹적이었다. 파격적으로 얘기한다면, 구미호나 불여우한테 홀린 기분 같았다. T.V. 드라머나 영화를 통해서는 간접경험을 많이 해 보았지마는, 직접 닥쳐보니 어리벙벙하였다. 어른스럽게 취할려고해도 아무래도 아직까지 어린 탓인지 부자연스러웠다.

"예, 저도 소금강으로 가는 길입니다만, 괜찮으시다면 同行해 드리겠읍니다. 하지만, 저는 등산 초보자이고, 또한 다리가 약해서 등산을 잘하지 못합니다."

"그런데, 왜 혼자 등산하시죠?"
의외의 질문을 던졌다.

"갑갑한 서울을 벗어나고 싶어서 거의 무작정으로 여길 왔죠. 그리고 여럿이 오는 것보다는 혼자는 오는 것이 마음을 정리할 때는 좋을 것 같아서요."

"그러세요? 저도 서울을 떠나 어디론가 가고 싶더군요. 그런데, 혹시 동부고속 아침 6시 차를 타고 오시지 않았읍니까?"

이 말은 余의 온 몸에 전류를 흐르게 하는 듯했다. 더듬거리는 목소리로,

"네―에, 마―맞―스―읍니다."

그녀는 호호 웃어댔다. 余는 얼굴이 붉어졌다.

"왜 웃으십니까?"

"당신은 무척 소심하군요, 특히 女子에 대해서…, 아닌가요?"

숨이 막힐 듯했다.

"네, 그런 편입니다."

어느덧 余의 이마와 얼굴은 땀으로 흥건했다.

"자, 이제 올라가야죠?"
하는 소리에 정신을 차리고 발을 옮기기 시작했다. 한참 동안은 말을 하지 않았다. 그녀 앞에서 베낭 매고 올라가는 것만 해도 무척이나 힘이 드는데, 말할 기운이 어디 있으랴. 더군다나 새벽에 비로봉을 올라갔다 온 후여서 다리 힘이 많이 소진되어 있었다. 오히려 그녀보다 뒤쳐지기 시작했다. 그쪽에서 말을 건네왔다.

"남자 분이 체력이 약하시군요. 저는 당신을 의지해서 산을 보다 수월하게 넘으려 했었는데……,"

또 한번 얼굴이, 아니 귀까지 달아 올

랐다. 하지만 어쩔수가 없었다. 더 이상 올라가기가 힘이 들었다. 그래서 余는 나무 그루터기에 걸터 앉고는 물을 마셨다. 앞서 가던 그녀는 뒤를 돌아보고는 앉아 있는 余쪽으로 내려왔다.

"저에게 물 좀 주실 수 있읍니까?"

"네, 물론이죠."

똑똑한 여자 같은데 등산할 때 물통을 갖고 다니지 않는 것이 이상스러웠다. 물을 마시고 있는 그녀의 모습을보는 순간, 보기와는 달리 강한 면이 그녀에게 있음을 깨달았다. 물을 먹고 나자 그녀는,

"같이 천천히 올라가죠 뭐. 어차피 오늘은 산中에서 잠을 청해야 할 것 같은데요."

"어디 텐트 칠만한 곳이 있읍니까?"

그녀는 조그만 가방에서 지도를꺼내들고 펼친 후, 손가락으로 가리킨다. 자세히 쳐다 보니 노인봉 정상 주변이었다.

"여기서 6㎞ 정도 되는 거리에 있지요. 그렇지만 조금만 더 가면 산장이 나옵니다. 그곳에서 잠을 청할려는거지요"

"어떻게 그런 지식을 알아두었죠? 용의주도 하시군요."

"기실, 저는 山行하는 것이 이번이 처음은 아니거든요. 사전에 알아 두는것은 당연한 일이지요."

余는 그녀 앞에서 바보가 된듯한 기분이었다.

다시 올라가기 시작하여 드디어 첫 고지인 동대산을 정복하였다. 이제부터는 얼마간 내리막길이었다. 표지판에는 「진고개산장 1.1㎞」이라고 씌어 있었다. 죽죽 내려왔다. 그런데, 어깨 부분이 어쩐지 좀 이상했다. 월정사에서, 야영장에서 밥을 해먹었으므로 가벼워져야 할 베낭이 가벼워진 것을 전혀 느낄 수 없었다. 그래서 허리를 위로 젖히면서 베낭을 한 번 위로 퉁겼다. 그랬더니 뭔가 떨어지는 소리가 들렸다. 손바닥보다 조금 큰 돌이었다.

"에이, 사내가 그 정도의 짐도 지지 못해요? 가벼운 돌 하나 얹어 놓은것 가지고 ……, "

어찌된 영문인지 계속 그녀에게 마이너스的인 면만을 보여주게 되자, 余는 속이 상했다.

진고개 산장에 내려오니 길이 네 갈래였다. 산장은 폐쇄된 것이었다. 표지판을 보고서야 다음 갈 길을 정할 수 있었다. 지금 시각이 오후 3시, 앞으로 14.4㎞가 남았다. '그녀 말대로 어차피 오늘은 노인봉 정상 바로 밑에 있는 산장에서 쉬고 가야겠는걸.' 보슬비가 내리고 있었다. 언제부턴가 소리없이 내리고 있었다. 비가 거세어질지도 모른다는 생각에 그녀와 余는 걸음을 재촉해야만 했다. 여전히 말은 오가지 않았다. '내가 체력만 더 있었더라면, 즐겁게 얘기하면서 걸을 수 있을텐데…' 余에게는 베낭지고 山을

오르는 것만 해도 벅찬 일이었다.

4.4㎞ 앞에 있는 산장이 빨리 눈 앞에 보이기를 바라면서, 비 때문에 더 무거워진 베낭을 지고, 피곤한 두 다리로 터벅터벅 걸어갔다. 다시 눈앞에는 4㎞의 오르막길이 펼쳐지고 있었다. 비가 더 굵어지자, 베낭에서 비옷을 꺼내어 그녀에게 주었다. 모처럼 사내로서의 일을 한 듯 싶었다. 그녀는 고마움을 미소로써 표시했다. 山行 초보자인 余로서는 4㎞ 행군도 사실 무리였다. 도중에 여러번 쉬었다. 그녀는 비가 와서 그런지 입을 더욱 굳게 다물었다. 한참 걸은 듯했다. 노인봉 정상에 다다른것 같았다. 그러나, 정상은 아니었고 야영장이었다. 땅바닥에 물코스로 파놓은 사각형 그림이 그것임을 보여 주고 있었다. 바로 앞에는 정상이 보였다. 그렇다면, 몇 백 미터만 걸으면 산장이었다. 余는 그것을 알고 있었지만, 그 자리에 털썩 주저앉아 버렸다. 비를 맞아서인지 추위를 느꼈고, 허기도 느꼈다. 드러눕고 싶었다.

"어서 일어나세요, 조금만 더가면 산장이에요, 거기서 쉬어요, 네?"

"먼저 가세요, 저는 지쳐서 더 이상은 못 가겠읍니다. 죄송합니다."

몸이 떨리는 것을 느낄 수 있었다. 비를 많이 맞아보았지만, 떨 정도로 맞은 기억은 없었다.

"남자가 그렇게 약해서 어떡하실려고 그럽니까?"

"비웃으셔도 저는 이제 어쩔 수가 없읍니다. 먼저 가시면 쉬었다가 나중에 가겠읍니다."

그녀는 잠시 생각에 잠기더니

"베낭에 통조림 있어요?"

"네, 있읍니다."

그녀는 베낭을 뒤적이다가 꽁치통조림을 꺼냈다. 통조림을 따서 건네면서,

"이것을 잡수세요, 그러면 기운이 좀 날거예요."

그녀가 주는 통조림을 먹기 시작했다. 비에 젖어 새앙쥐꼴이 된 채 통조림을 먹는 모습이란, 평소 같으면 해보지도 못할 일이었다. 그러나 힘이 나지 않았다. 여전히 주저앉은 채였다. 할 수 없는 듯한 표정을 짓고는,

"베낭은 제가 지겠어요. 5~6백미터는 갈 수 있으니까요."

아니, 이 무슨 망신이란 말인가. 너무도 꼴이 말이 아니었다. 하지만, 余의 안색은 안좋았다. 감기걸리기 직전의 파래진 얼굴이었다. 몸이 허약한 것을 탓할 수 밖에 없었다. 어떻든 간에 余는 '저토록 아름다운 여인에게 무거운 베낭을 지게 하다니'하는 수치심으로 가득 찼다. 겨우 일어난 余는 베낭을 진 그녀를 따라서 걸어갔다. 내리막길이었다. 아쉬움이 컸다. 오르막길도 아닌 내리막길이었는데.

산장은 아담했다. 멋있는 것은 아니었지만 나쁘지는 않았다. 머리속에서 그려보던 모습과는 달랐다. 산장안은 더욱 더. 하기사 등산을 언제 해봤어야 산장이 어떻게 생긴줄 알지. 안은 사람들로 붐볐다. 비가 온 탓으로 밖에서 야영할수 없었기 때문에 더욱 그러했다. 우리가 머무를 공간마저 없는 듯했다. 구석진 곳에 두 사람이 겨우 누울 수 있는 공간을 얻음으로 해서 그나마 하루저녁을 비 피해서 잘 수 있게 되었다. 짐을 풀었다.

"제가 쌀 씻고 올테니까 잠시 쉬고 계세요."

정말 고마울 뿐이다. 처지가 뒤바뀌었지만, 그녀의 베품에 무언가 느끼고 있었다. 역시 베푼다는 것은 중요한 일이야. 나 또한 다른 사람에게 많은 것을 베풀어야 하지 않겠는가.

余는 큰 숨을 들이마시고는 베낭에서 갈아 입을 옷을 꺼내었다. 먼저 온 사람중의 한 사람이 주인 방에서 옷을 갈아입는 것을 보았기 때문에, 주저 없이 그 방에 들어가서 마른 옷으로 갈아 입었다. 기분이 한결 괜찮아졌다. 힘이 솟아나는 것을 느끼자, 베낭에서 버너통을 꺼내었다. 그리고는 바깥에 나가 처마밑에서 버너를 장치하였다. 일어서서 팔을 손으로 비비면서 열을 내고 있으니까, 그녀가 올라 오는 모습이 보였다.

"바깥에 나와 계셨군요. 좀 괜찮으세요?"

"네, 정말 미안합니다. 못난 사내때문에……, "

"괜찮아요. 자, 그럼 저녁을 맛있게 해야죠. 저녁을 같이 해도 괜찮겠죠?"

"물론입니다. 저로서는 영광이올시다."

"영광까지는 ……. "

그녀는 환한 미소를 띠었다. 余는 미안함을 느끼면서도 오늘 저녁밥은 꿀맛일거라고 생각하였다. 참으로 의외의 女子였다. 외양에 대한 편견과는 달리 마음씨도 괜찮은 女子 같았다. 찌게도 만들었다. 김도 꺼냈다. 김치도, 꺼냈다.

山을 인연으로 해서 처음 만난 둘은 서로를 별다르게 의식하지 않은 채, 쑥스러움을 잊은 채, 저녁밥을 달게 먹었다.

'옆에 있는 사람들은 우리를 친구 또는 애인(?) 사이로 보겠지.' 어쩐지 기분이 좋았다. 설겆이는 다음 날 하기로 했다. 식곤증과 피로를 달래며 쉬고 있을 때, 산장 주인이 다가와서 숙박계를 내놓았다. 余는 이름과 주소를 써넣었다. 그女도 썼다. 옆에서 지켜보던 余는 그녀가 자기보다 두살 위임을 알았다. 그러니까 24살이었다. '어쩐지 나보다 훨씬 성숙해 보이더라.'

별이 보이지 않아 余는 아쉬웠다. '美女와의 밤을, 별빛과 함께라면 더욱 좋을텐데.' 산장 바깥에 나와 짖궂은 하늘을 원망하고 있으려니까, 그녀가 어느

틈에 나왔는지 살그머니 다가와 옆구리를 찌른다. 깜짝 놀라 몸을 움직이는 모습이 재미있었던지 웃어댔다. 사실 그녀의 모습이 너무 아름답기 때문에 그녀의 행동에 대해 알맞은 표현을 한다는 것은 힘들다. 그저 아름다울 뿐이다.

"등산 초보자신가 보죠?"

"네"

"어때요, 산길을 걸어본 느낌이?"

"좋습니다. 다음에 또 등산하고 싶습니다."

"또 털썩 주저 앉으실려구요?!"

"아닙니다. 절대로! 다음 번에는 그런 일이 없을 겁니다."

"등산을 함으로써, 인생을 배우는데 커다란 도움이 되죠. 그래서 저는 이렇게 산을 찾는 거랍니다. 남들이 의아해 하는데도 말이에요."

"인생(人生)에 대해서 뭔가 느끼거나 얻으신 점이 있으시면 제게 일러 주시겠읍니까?"

"글쎄요, 20年 삶에서 남에게 일러줄 만한 것이 있을까요?"

"그러시다면, 음, 당신은 무엇을 위해 사십니까, 즉, 다시 말해서 왜 사십니까?"

"계속 어려운 질문만 던지시는군요. 인생이란, 살며 배우며 사랑하며 ……… 뭐 이런 것이 아닐까요"

"도전이 있지요. 인간은 도전하면서 살아가니까요. 그것은 패기로 가득할 때 성공하기 쉬우며, 남보다 더 많은 정열을 가져야 성공할 수 있지요. 사람들 각각이 갖는 도전은 그 형태와 내용이 천차만별이죠. 또한 세상은 사람들의 그러한 도전을 받아줄 만큼 넓고 깊고 높거든요. 그런데, 보통은 도전이 실패하기 쉬운 법이지요. 실패한 사람의 심정이란 비참하기 이를 데 없죠. 이런 과정에서 사람들은 보다 새로운 것을 배우거나, 배우는 것을 포기하고 좌절로 빠져드는 수가 있지요."

"매우 좋은 말을 하셨읍니다. 사람은 어차피 나뭇잎과 가시덤불을 헤치며 정상으로 향해 올라가는 動物이니까요."

"당신과 얘기를 나누니 기분이 매우 좋습니다. 뿐만 아니라 처음보는 분이라 그런지 솔직한 마음이 되어집니다."

"그래요, 산에서 만나 얘기를 나누면 어떤 각별한 맛을 느끼거든요."

"사실, 저는 男子라 그런지 몰라도 지나가는 女子를 보면 동물적 본능에 의한 생각을 많이 갖게 되는데, 오늘 당신에게도 그런 것을 가졌었다고 고백합니다."

"남자는 원래 늑대니까, 뭐"

"그정도로 봐 주시니 고맙습니다. 짐승보다 못한 놈이라고 안하니."

이 말에 서로 웃었다. 그녀의 모습은 정말 아름다웠다. 하늘이 우리를 시기하여 안개를 계속 뿌려 놓은것 같았다.

"직장에 다니십니까?"

"네"

"만족하십니까."

"만족합니다. 제 전공을 살려서 택한 직종이니까요."

"노동(근로)에 대해서 어떻게 생각하십니까?"

"노동은, 우리는 흔히 근로라 얘기하지만, 숭고한 것이라고 생각합니다. 여기에는 물론 정신적인 것이 들어가는 것이구요. 한마디로 말하면 자기 실현을 위한 수단이라고 생각합니다."

"좋은 의견이십니다. 다른 질문 하나 하고 싶은데 괜찮겠읍니까?"

"네"

"음악이나 미술, 문학을 좋아하십니까?"

"저는 예술을 사랑합니다. 고로 미술·음악·문학 모두를 사랑하지요."

이 말에 余는 공감을 하였다. 그녀의 모습과 음성을 들으면 누구나 동감할 것이다.

"나이가 몇입니까?"

"스물 둘입니다. 당신보다 두 살 아래지요."

"그럼 제가 누나군요. 어때요, 저에게 '누나'라고 불러봐요"

余는 갑자기 쑥쓰러워졌다.

"호호호 ……."

"저, 우리 안으로 들어가죠. 지금 밤이 깊어진것 같은데."

"안됐지만, 그래야겠군요."

女人의 목소리는 밤에 더욱 아름다왔다. 소녀티를 벗어난 성숙한 女子의 음성이였다. 이에 비하면 아직 余의 목소리는 어렸다. 잠자리가 문제였다. 둘이 겨우 들어가 누굴 공간은 있다 할지라도, 어찌 낮선 남녀가 동석할 수 있단 말인가. '할 수 없지 않은가. 내가 앉아서 잘 수 밖에' 이리하여, 그녀를 눕게하고 余는 그녀의 발 아래 앉아서 고단한 몸을 꿈속으로 이끌었다. 벽에는 기대었지만, 한참 그렇게 있으니 몸이 편치 못해 이내 눈을 떴다. 혼자 잠을 자지 않고 있었다. 바깥으로 나왔다. 어둠 속을 실컷 응시하고 나자, 전(前)날의 일이 생각났다. 불과 몇시간 전들의 일이었지만. 정말 꿈인지 생시인지 분간하기 어려웠다.

누가 몹시 흔드는 것 같았다. 귀도 후비고, 코도 만지고, 팔을 꼬집어 대기도 했다. '졸려 죽겠는데 누가 감히 깨우는 거야.', 전날의 일을 까맣게 잊은 듯 이런 생각을 하는 것이었다. 눈을 비비면서 겨우 일어났다. 많이 듣던 아름다운 목소리가 들렸다.

"벌써 8시 30분이에요, 잠꾸러기 양반아"

余는 그녀의 성화에 산장 아래로 내려가 샘터에서 세수를 하였다. 눈이 맑아

지니, 산 아침이 상쾌하게 느껴졌다. 얼른 위로 올라갔다. 그녀와 余는 아침을 먹고 나서 下山을 준비하였다.

"이제부터는 계속 내리막길이래요. 10 ㎞라고는 하지만 빠르면 4시간 대에 주파할 수 있대요."

"네, 오늘은 자신 있읍니다."

휘파람이 저절로 나올 것만 같았다. 베낭은 무겁지 않았으며, 무릎도 충분히 견딜만 했다.

"내려가는 도중에 절경들이 펼쳐진다고 산장주인이 말하더군요."

"그래요?, 그럼 사진 몇 장을 찍어야 겠군요."

비탈진 길이었지만 내려가는데 무슨 장애가 되랴, 더군다나 美女와 同行하고 있는데. 쿵쿵, 지축을 박차며 잘도 내려갔다. 전날 비가 왔던 탓으로, 간혹 미끄러운 곳이 있었으므로 조심을 해야 했다.

드디어 절경은 시작되는 듯했다. 빗물에 깍인 바위와 푸른 녹음이 여우러진 풍경이 나왔다. 그녀에게 부탁해서 사진 한 장을 찍었다. 그녀 모습도 찍고 싶었다.

"저, 당신의 모습을 사진에 담고 싶습니다."

"원하신다면 ……, "

그녀는 바위위에 아름다운 자태로 앉았다. 余는 그녀 모습을 바라보다가 사진기를 들고 멋있게 찍었다. '풍경이 아름답고, 미녀가 있는데 사진이 나쁠라고."

이곳의 분위기는 야릇했다. 안개가 여전히 끼어 있어 어떤 신비로운 분위기를 자아내고 있었다. 余는 바위에서 일어서는 그녀의 얼굴을 뚫어지라고 응시하였다. 이마에서 두 눈으로, 다시 코에서 입술로, 그 순간 그녀는 고개를 돌렸다. 그래도 그녀를 계속 뚜렷이 쳐다 보자, 오히려 그녀가 고개를 다시 돌려 余를 향해 두 눈을 반짝거렸다. 그녀의 두 눈과 마주치는 것을 느끼자 몸이 마취되는 것과 같았다. 움직일 수 없었다. 그녀가 서서히 다가섰다, 미소를 띤 채. 믿기지 못할 일이 일어났다. 입부분에서 감미로운 마찰이 생긴 것이다. 그것은 달콤하면서도 뜨거웠으며, 가슴을 울렁거리게 했다. 余는 너무나 당황하여 어찌할 바를 몰랐다. 그러나, 영원히 이 상태로 있고 싶었다. 난생처음 맛보는 황홀한 순간이었다. 황홀, 무아지경이었다.

"자, 이제 내려가요."

몽롱한 상태 속에서 상냥한 목소리가 들렸다.

내려 오는 길에 余는 발을 헛디딘적이 한두 번이 아니다. 비몽사몽간을 헤메고 있는 중이었다.

소금강 계곡을 내려 오면서 余는 위에서의 일을 영원히 간직하겠다고 다짐하면서도 그녀가 왜 그런 행동을 했는지에 대해서는 의구심이 사라지지 않았다. 정말 모를 일이었다.

소금강 기점에 도착하였다. 많은 행락객들과 승용차로 붐볐다. 일 년 내내 땀 흘리며 일하던 그들에게 있어서 여름 휴가는 값진 것이리라.

버스들이 있는 곳까지 걸어서 더 내려갔다. 그곳에 있는 어느 한 가게에 들어갔다. 시원한 음료수를 마셨다. 몸도 마음도 음료수처럼 시원해졌다. 등산하고 난 기쁨, 거기다 더할 나위 없는 선물까지 받았으니, 余는 들떠 있었다. 하지만, 만남이 있으면 헤어짐이 있듯이, 이젠 그녀와 헤어져야 했다. 余에게는 그녀의 신상에 대해 물어 볼 용기가 없었다. 단지 이제까지의 은덕에 황공해 할 뿐이었다.

"우리, 여기서 헤어져요. 전 먼저 강릉에 가 봐야겠어요. 언젠가 서울에서 또 만날 날이 있겠지요. 앞으로 자신있게 사세요."

그녀는 이 말을 끝으로 훌쩍 떠나버렸다. 찰나와 같은 만남에서 헤어지는 것도 서글픈데 하물며 연인이 헤어진다는 것은 ……, 이제야 조금이나마 알 것 같았다.

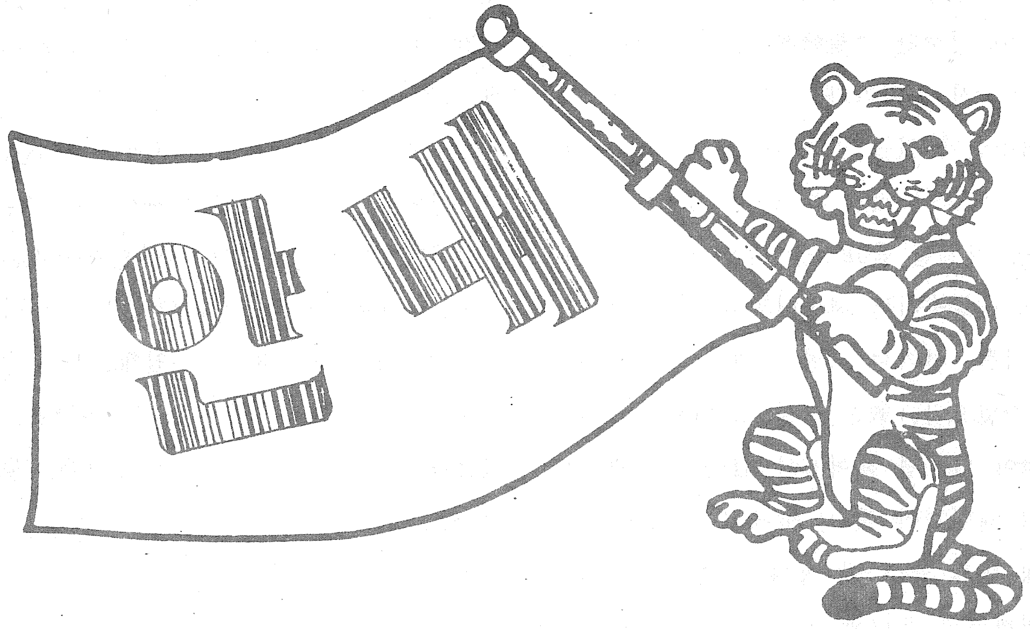
"자신있게 사세요, 자신있게."

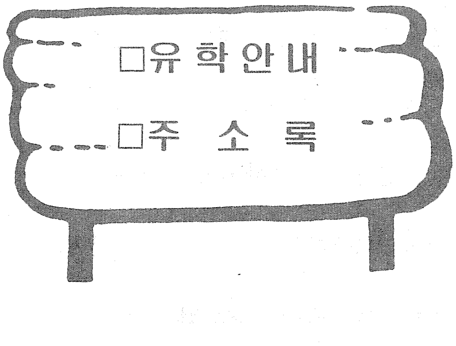
余는 우두커니 서서 먼 산을 바라보고 있었다. 어느덧 안개는 余의 주위를 둘러싸고 있었다.

우리들이 젊었을 때는 이성이 훨씬 민감하고, 훨씬 더 호기심이 많다. 그렇기 때문에 우리들은 수학이건, 지리이건, 무엇이건 간에 그토록 쉽게 배운다. 나이를 먹어감에 따라 이성은 점점 더 강화되고, 무거워지고, 둔감해진다. 나이가 많은 대부분의 사람들이 얼마나 편견이 심한지를 너는 깨달은 적이 있느냐?

그들의 이성은 개방되지를 않았고, 모든것을 고정된 관점으로부터 접근한다. 지금 너는 젊지만, 만일 아주 조심하지 않으면 네 이성도 역시 그렇게 될 것이다.

— KRISHNAMURTI —


안내


□유 학 안 내
□주 소 록

유학 안내

(미 국 편)

편집부

여태까지 과학은 서양을 중심으로 전개되어 왔다. 이제는 동양에서 주도권을 잡을 차례이다. 그러기 위해서는 서양의 선진과학을 도입하여 우리의 것으로 소화하고 발전시켜 나가야 한다.

좀더 새롭고 깊은 학문을 위해, 수학의 불모지인 한국의 발전에 초석이 되고자, 큰 포부를 지닌 여러분에게 조금이라도 도움이 되고자 몇회의 학회지를 거쳐 유학(특히, 수학분야를 중심으로)안내를 하고자 한다.

미 국 (1)

〈 1 〉 유학자격

'86년도 부터는 Toefl 성적이 이과인 경우 500점, 문과인 경우는 550점 이상이 되어야 하며, 또는 Toefl을 대신해서 중앙 교육 평가원에서 실시하는 어학 시험(2月 2日 1회/년 실시, 1月 9日 ~ 15日 원서 접수)에서 이과인 경우 60점, 문과인 경우는 70점 이상을 취득해야 한다.

〈 2 〉 대학의 선정

가〉 대학 신입의 경우

a) G P A : 3.3 / 3.0 / 2.75 / 2.5 / 2.3 / 2.0 (4.0 SCALE)

b) TOEFL : 600 / 580 / 550 / 530 / 500 / (800점)

c) S A T (Scholastic Aptitude Test) : 각 800점 만점.

VERBAL PART : 650 | 600 | 550 | 500

QUANTITATIVE (MATHEMATICS) PART : 700 | 650 | 600 | 550 | 500 | 450

고교 1,2,3년 평균 성적이 3.0이상 되고 Toefl 성적이 550점, SAT (V+Q)

성적이 1,150이상 되어야 좋은 학교에 입학할 수 있다. 학교성적, GPA 가 좋지 않을 때에는 Toefl, SAT 성적이 좋으면 좋은 학교에 입학할 수도 있고 반대로 SAT, Toefl 성적이 낮더라도 GPA가 뛰어나면 좋은 학교에 입학이 가능하다.

즉, 학교에 따라서는 GPA보다 Toefl, SAT Score를, Toefl, SAT보다는 학교성적(GPA)를 더 중시하는 수가 있다. 그러나, 그 학교에서 요구하는 minimum score 즉, minimum GPA, minimum Toefl : minimum SAT Score가 되지 않을때에는 다른 두 요소가 뛰어나더라도 그 학교는 피하는 것이 좋다. 한가지 특기할 것은 외국인에겐 Toefl만 요구하고 SAT를 요구하지 않는 대학이 많이 있으며, Toefl, SAT중 한가지만 원하는 대학도 있으므로 학교를 선택할 때에는 이 점을 잘 선용하여 GPA와 Toefl 혹은 GPA와 SAT만을 가지고 좋은 학교에 갈 수 있도록 해야 한다.

나〉 대학 편입의 경우

대부분의 미국 대학들은 편입생을 받는 경우 고교성적과 대학·재학 성적을 동시에 요구한다. 물론 GPA가 "B"(3.0/4.0)이상 되어야 좋은 학교에 편입할 수 있으며 고교 성적의 경우 석차표시를 요구하는 학교도 있다.

〈 3 〉 대학 입학에 필요한 서류(1개교 지원 기준)

가〉 대학 신입

a) 고교 성적증명서 2통(영문, 국문일때는 영문으로 번역하여 공증받아야 한다)

b) 고교 졸업증명서 1통(영문, 〃)

c) 재정보증서 1통(재정보증인의 영문 예금잔고 증명을 은행에서 발급받아 작성, 금액은 ₩15,000,000 이상)

d) 자기 소개서

e) Toefl, SAT score report.(ETS를 통해서 Official report를 지망하는 학교에 보내야 한다.)

f) 추천서 1인(전공 교수)

나〉 대학 편입

a) 고교 졸업증명서 1통, 대학 영문재학(졸업)증명서 2통

b) 고교 성적증명서 2통, 대학 영문 성적증명서 2통

c) 재정 보증서 1통

d) 자기 소개서 1통

e) 추천서 1인 또는 2인

f) Toefl, SAT score report

〈 4 〉 APPLICATION MATERIALS를 보내는 시기

dead line을 의식하지 않고 일찍 보내는 것이 좋다. 희망 입학기의 1년 전에 apply하는 것이 바람직 하다.

APPLICATION FORM, APPLICATION FEE, AFFIDAVIT OF SUPPORT, ENGLISH TRANSCRIPT, CERTIFICATE OF GRADUATION, LETTER OF RECOMMENDATION, AUTOBIOGRAPHICAL ESSAY 등은 일찍 보내고 Toefl, SAT score 등은 dead line까지 도착시키면 된다.

＊미국 대학 입학 정책은 first come, first served이다.

〈 5 〉 GRE − Graduate Record Examination

가) GRE의 목적

GRE는 admission panel이나 fellowship panel의 담당자들이 지원자가 대학원 교육을 성공적으로 이수할 수 있는지 그 잠재 능력을 평가하는 참고 자료가 되며, 또한 GRE score는 대학 성적이나 추천서와 함께 평가의 기초 자료가 된다. GRE는 모든 학교가 입학지원시 요구하는 것은 아니며 학교에 따라서 요구하는 곳과 요구하지 않는 곳이 있으니 자세한 것은 학교에서 발행하는 bulletin (학보)이나 application form을 참조해야 한다. 또한 GRE를 요구하는 학교중에서도 경우에 따라서는 입학 후 첫 학기중에 시험을 보도록 유예 조건을 주는 경우도 있다.

나) GRE의 성격

GRE는 Aptitude test와 Advanced test로 구분되며, Aptitude test는 대학원 수준에서 요구되는 일반적인 학력을 평가하는 시험으로 verbal ability, quantitative ability, analytical ability의 3 section으로 이루어지며 verbal ability test에는 reading comprehention, synonym, antonym, sentence completion, analogy 등에 관련된 문제가 출제되며, Quantative test에서는 arithmetic resoning, 간단한 대수문제, 그래프 및 도식등의 해독에 관한 문제들이 출제되는데 이 두가지 부분의 점수 합계가 1,200점 이상이면 무난하다 할 수 있다. 시험에 소요되는 시간은 대략 3시간 30분 정도이다.

Advanced test는 특정한 전문 분야의 대학원 교육에 기초가 되는 개념에 대한 이

해도 및 지식을 평가하는 것으로 대학의 교수진들과 ETS (Educational Testing Service)의 전문가들이 다양한 curricular 속에서 전반적인 academic field 를 다루므로 모든 문제를 완벽히 해결한다는 것은 몹시 어렵다.

Advanced test 가 요구되는 학과는 대략 다음과 같다.

Mathematics, Biology, Physiscs, Chemistry, Engineering, Geography, Economics-…….

〈 6 〉 Toefl – Test of English as a Foreign Languge

Toefl 관리는 미국 뉴저지주 프린스튼에 있는 ETS (Educational Testing Servise)에서 하고 있다. 정기 시험은 연 6회, 특별 시험도 연 6회로 현재는 월 1회 비율로 실시되고 있다.

〈 응시 안내 〉

• 신청서를 한미교육위원단 Toefl 사무국에 우송하거나 직접가서 제출한다.

• 위치 : 서울특별시 종로구 경운동 89-4 고합빌딩 401호 (덕성여대 건너편)
  Tel. 744-7701

• 우편 신청시 이용할 주소 : 우편번호 110
  서울특별시 광화문 우체국 사서함 643호 한미교육위원단 TOEFL 사무국.

Toefl Test 형식은 Listening Comprehension 40분, Structure & Written Expression 25분, 그리고 Reading Comprehension & Vocabulary 가 45분으로 총 test 시간이 110분이다.

Toefl 성적中, 600점 이상이면 native speaker 에 뒤지지 않는 영어 실력을 갖춘 것으로 보며, 550점 이상이면 대학 수업에서 필요한 영어 실력을 대체적으로 갖추었다고 본다.

〈 7 〉 Toefl 없이 유학하는 경우

원칙적으로 Toefl 성적을 영어가 모국어가 아닌 학생들에게 요구하지만, 병역문제가 걸린 학생이라든가 국비 유학생, 연구생등 시간이 급박한 학생에게 대학 자체의 Language School 이나 ELS 와 같은 공신력 있는 어학 기관을 거치는 조건으로 선별적으로 우수한 학생들에게 조건부 입학허가서를 주기도 하는데, 조건은 영어 실력이 대학 당국에서 요구하는 선에 이를 때까지 공부를 해야 한다는 것이다.

〈 8 〉 각 대학의 GPA 기준

Name of School	Minimum acceptable	Average (4.0기준)	Name of School	Minimum	Average
Univ. of Chicago	—	3.4	State Univ.of N.Y. / Albany	2.6	3.02
MIT	—	3.2	Univ.of North Carolina / Charlotte	2.5	2.84
Havard	—	—	Univ.of Texas / Austin	3.0	3.36
Boston Univ.		2.9	Calif. State.Univ./ Dominguez Hills	2.5	2.7
Northwestern Univ.	—	3.4	Calif. State Univ./ Sacramento	2.5	3.0
Univ. of California / Berkeley	3.2	3.58	Univ.of San Francisco	2.5	3.0
Purdue Univ./ Lafayette		3.4	Eastern Ill. Univ.	2.5	2.9
Columbia Univ.		3.45	Illinoi State Univ.	2.75	3.25
Cornell Univ.		3.2	Indiana State U. / Terre Hante	2.5	2.72
Rice Univ.	3.0	3.2	Eastern Michigan Univ.	2.5	2.61
Calif. State Univ./ Fresno	2.75	3.0	Univ.of Nebraska/ Lincoln	2.5	3.2
Calif. State Univ./ L.A.	2.5	3.3	Central Missouri State Univ.	—	2.8
Univ. of Calif./ Riverside	3.2	3.27	Texas A & M Univ.	2.75	3.15
Univ. of Florida	3.0	3.3	Utah State Univ.	3.0	3.0
Univ. of Ill./ Urbana-Champaign	3.0	3.2			
Univ. of Mass/ Amherst	2.75	3.2			
Michigan State Univ.	3.0	3.3			

〈 9 〉 주요 科에서의 大學 Ranking

Rank	Mathematics	Physics	Statistics
1	Princeton	Harvard	Stanford
2	UC(Berkeley)	M.I.T.	UC(Berkeley)
3	Harvard	Cornell	Wisconsin
4	M.I.T.	Cal. Tech	Chicago
5	Chicago	UC(Berkeley)	Iowa State
6	Stanford	Princeton	Cornell
7	Yale	Stanford	N.Carolina
8	N.Y.U.	Illinois	Florida State
9	Michigan	Columbia	Purdue
10	Columbia	Yale	Minnesota
11	Brown	SUNY(Stony Brook)	Columbia
12	Illinois	Pennsylvania	Wasington
13	Cal. Tech	UC(San Diego)	Yale
14	Minnesota	Maryland	U.C.L.A.
15	SUNY(Stony Brook)	U.C.L.A	Carnegie-Mellon
16	Washington	Washington	Texas A&M
17	Brandeis	Wisconsin	Colorado State
18	Indiana	Michigan	Iowa
19	Pennsylvania	UC(San Barbara)	N. Carolina State
20	Purdue	Texas(Austin)	Rutgers

* Remark; 미국 대학은 科內에서도 우수한 분야가 있고 뒤떨어진 분야가 있으므로 자기 전공분야에 맞는 大學을 선택하는 것이 바람직하다.

〈10〉 Study Plan

유학을 가고자 하는 사람이 계획을 세워 놓지 않는 경우는 없을 것이다. 하지만, 뚜렷이 보다 철저히 함으로써 목적 달성에 도움이 되도록하는 뜻에서 Study Plan 방법을 소개하고자 한다.

** Study Plan **

1. 전공하려는 분야를 선택한 이유
2. 전공분야 중에서도 특히 관심을 갖고 있는 세부적인 분야를 상세히 서술
3. 연구하고자 하는 주제의 학문적인 의문점
4. 장래의 진로
5. 개발시키고 싶은 학구적 능력 또는 직업상의 능력
6. 이외에 Study Plan 작성에 도움이 될 사항

〈11〉 유학생이 얻을 수 있는 장학금

대부분의 미국 대학들은 외국인 학생들에게 장학금 혜택을 주지 않는다는 명문 규정을 두고 있다. 이 때의 Scholarship은 아무런 조건 없이 주는 순수 장학금을 말한다. 따라서 외국인들은 일정한 봉사(service work)를 하고 그에 따른 재정 보조(financialaid)를 얻을 수 밖에 없다. 이것을 흔히 assist antship이라 하는데, 거기에는 Teaching Assistantship과 Research Assistantship이 있다.

Assistantship을 신청할 수 있는 일반적인 조건으로는 GPA가 4.0만점에 3.5이상, GRE General Test가 1,250점 이상, GRE Subject Test가 85%이상, Toefl이 580점 이상이 되어야 한다.

입학 당시 Assistantship을 받지 못한 학생들은 1학기 이수 후 학점이 3.25/4.0 이상이면 T.A와 R.A를 신청할 수 있다. Assistantship의 수혜기간은 보통 one academic year (9개월간)이고, 수혜액은 $ 1,500 ~ 7,000 정도로 다양하며, 주당 15 ~ 20 시간의 Serve work이 요구된다.

㉠ T. A.

강의 조교로 지원할 경우는 Test of Spoken English 성적을 요구하는 학교들도 있는데, 220점 이상이 되어야 한다.(이 시험은 ETS에 직접 신청하면 국내에서도 응시 가능하다.) TSE를 요구하지 않을 경우에는 등록 직후 적격 여부를 판단하는 영어 시험을 보고 그 결과에 따라 T.A. 자격이 확정된다.

㉡ R . A .

교수들의 연구 분야와 자신의 희망 전공 분야가 일치할 경우 수혜 가능성이 크므로 apply 하기 전에 지원학과에서 진행중이거나 착수할 research 또는 project를 서신교환을 통해 알아두면 유리하다. 또한 어떤 특별한 자격이나 특이한 경험, 예를 들면 전자 현미경을 수년간 다루었다거나 학교 방송국이나 신문사에서 근무했다거나 fieldwork, research 에 참여한 경험등은 R.A. 지원시 유리하게 작용한다.

＊ notion ＊

미국은 대학 등록금이 비싸다고 알려져 있지만, 그렇다고 미국 유학의 길을 겁낼 필요는 없다. 두드리고 찾으면 열리고 얻을 수 있기 때문이다.

유학의 길에 오르는 사람은 지겹도록 듣는 얘기인데, 학교 선정시 조사를 많이 해야 한다. 또한 장학금을 신청해두는 것이 좋다.

＊ 시사 영어사 유학 상담소 이용하면 유익

보다 많은 정보를 제공했으면 하는 아쉬움이 생기지만 학회지 지면 할애가 여의치 않아서 헛점 투성이로 간략하게 서술한 것 같다. 하지만, 학우들에게 조금이라도 '유학의 꿈'을 심어 주었으면 하는 것이 우리의 바램이다. 다음 호에는 보다 알찬 내용이 실리기를 바라면서…… .

〈10〉 Study Plan

유학을 가고자 하는 사람이 계획을 세워 놓지 않는 경우는 없을 것이다. 하지만, 뚜렷이 보다 철저히 함으로써 목적 달성에 도움이 되도록하는 뜻에서 Study Plan 방법을 소개하고자 한다.

** Study Plan **

1. 전공하려는 분야를 선택한 이유
2. 전공분야 중에서도 특히 관심을 갖고 있는 세부적인 분야를 상세히 서술
3. 연구하고자 하는 주제의 학문적인 의문점
4. 장래의 진로
5. 개발시키고 싶은 학구적 능력 또는 직업상의 능력
6. 이외에 Study Plan 작성에 도움이 될 사항

〈11〉 유학생이 얻을 수 있는 장학금

대부분의 미국 대학들은 외국인 학생들에게 장학금 혜택을 주지 않는다는 명문 규정을 두고 있다. 이 때의 Scholarship은 아무런 조건 없이 주는 순수 장학금을 말한다. 따라서 외국인들은 일정한 봉사(service work)를 하고 그에 따른 재정 보조(financialaid)를 얻을 수 밖에 없다. 이것을 흔히 assist antship이라 하는데, 거기에는 Teaching Assistantship과 Research Assistantship이 있다.

Assistantship을 신청할 수 있는 일반적인 조건으로는 GPA가 4.0만점에 3.5이상, GRE General Test가 1,250점 이상, GRE Subject Test가 85%이상, Toefl이 580점 이상이 되어야 한다.

입학 당시 Assistantship을 받지 못한 학생들은 1학기 이수 후 학점이 3.25/4.0 이상이면 T.A와 R.A를 신청할 수 있다. Assistantship의 수혜기간은 보통 one academic year (9개월간)이고, 수혜액은 $ 1,500 ~ 7,000 정도로 다양하며, 주당 15 ~ 20 시간의 Serve work이 요구된다.

㉠ T . A .

강의 조교로 지원할 경우는 Test of Spoken English 성적을 요구하는 학교들도 있는데, 220점 이상이 되어야 한다.(이 시험은 ETS에 직접 신청하면 국내에서도 응시 가능하다.) TSE를 요구하지 않을 경우에는 등록 직후 적격 여부를 판단하는 영어 시험을 보고 그 결과에 따라 T.A. 자격이 확정된다.

㉡ R . A .

교수들의 연구 분야와 자신의 희망 전공 분야가 일치할 경우 수혜 가능성이 크므로 apply 하기 전에 지원학과에서 진행중이거나 착수할 research 또는 project를 서신교환을 통해 알아두면 유리하다. 또한 어떤 특별한 자격이나 특이한 경험, 예를 들면 전자 현미경을 수년간 다루었다거나 학교 방송국이나 신문사에서 근무했다거나 fieldwork, research 에 참여한 경험등은 R.A. 지원시 유리하게 작용한다.

---

* **notion** *

미국은 대학 등록금이 비싸다고 알려져 있지만, 그렇다고 미국 유학의 길을 겁낼 필요는 없다. 두드리고 찾으면 열리고 얻을 수 있기 때문이다.

유학의 길에 오르는 사람은 지겹도록 듣는 얘기인데, 학교 선정시 조사를 많이 해야 한다. 또한 장학금을 신청해두는 것이 좋다.

* 시사 영어사 유학 상담소 이용하면 유익

보다 많은 정보를 제공했으면 하는 아쉬움이 생기지만 학회지 지면 할 애가 여의치 않아서 헛점 투성이로 간략하게 서술한 것 같다. 하지만, 학우들에게 조금이라도 '유학의 꿈'을 심어 주었으면 하는 것이 우리의 바램이다. 다음 호에는 보다 알찬 내용이 실리기를 바라면서…… .

주 소 록

교 수 님 주 소 록

이 름	주 소	전화번호
권택연 교수	(135) 서울 강남구 청담동 1의 1 삼익APT 13동 1002호	543-2801
김성운 교수	(132) 서울 성북구 종암2동 9-73	912-1144
김영욱 교수	(133) 서울 성동구 옥수동 220-1 한남하이츠 8-507	234-1088
위인숙 교수	(135) 서울 강남구 개포동 경남APT 2동 909호	555-2083
유희세 교수	(121) 서울 마포구 서교동 395 의 195	324-2398
장태환 교수	(135) 서울 강남구 잠실6동 장미타운 14동 807호	422-6396
조인호 교수	(140) 서울 용산구 효창동 5의 161	713-3034

****** 수 학 과 4 학 년 주 소 록 ******

이 름	학번	주 소	전화번호
김상태	82	경북김천시남산 2 동 176-25	2-5703
심재관	82	서울은평구구증산동 131-54	373-9964
홍주희	81	서울강동구암사동 456-2	
김흥수	〃	강원도원주시관설동 1483(5/3)	43-6371
김상일	〃	서울은평구대조동 46-24	387-5107
김근영	80	서울강동구거여동 202-197	478-7904
이희균	〃	인천남구간석동주공APT 46 동 216 호	
박태서	〃	서울도봉구미아 4 동 55-34 호 (6/1) 988	988-4419
정종신	〃	서울성북구안암동 2 가 112번지 (9/4)	744-4479
이창언	〃	서울성북구안암동 5 가 133-6 호	95-4669
이용범	〃	서울은평구응암 3 동 376-39	302-2966
황문수	〃	경남마산시해운동 2-23	2-7036
이흥규	〃	서울동대문구제기 2 동 52-3(15/3)	95-3215
채수관	〃	서울은평구진관의동 479-71	386-1555
안승호	〃	서울관악구봉천 4 동 897-14	879-9326
박혜경	〃	부천시소사동한신 APT 106-403	654-9010
김치우	79	대구남구대명 7 구 2239-28	413-3707
이재상	78	서울은평구신사동 336-11	374-2104
정영식	83	서울구로구오류 1 동 14-121(16/3)	613-4747
류근흥	〃	서울강서구신정 4 동 904-8	605-6336
이상진	〃	서울구로구구로 3 동 180-2(38/5)	853-2979
공한숙	〃	인천북구부평동 37(16/6)	92-5344
윤백희	〃	서울강남구반포동반포아파트 106 동 202 호	590-4275
구미순	〃	서울성동구자양동 671-7	447-1205

이종옥	〃	경기의정부시가능 1 동 34	2-4875
강영옥	〃	서울동대문구장안 1 동대흥연립 304	249-6831
조혜선	〃	서울성동구행당 1 동 19-64	293-9779
이기영	〃	서울종로구화동 1 (9/9)	732-6085
우경애	〃	서울도봉구도봉 1 동 602-1	992-1923
김성훈	〃	서울동대문구회기동 101-24(14/7)	914-1488
김미래	〃	서울서대문구북아현동 236-27	362-9510
윤호상	〃	서울강남구대치동 907-11	566-7031
민혜경	〃	서울강남구반포아파트 100 동 301 호	590-8721
윤태환	〃	서울성북구장위 1 동 219-460	917-7106
김덕원	〃	서울도봉구수유 1 동 473-14	980-2983
김원국	〃	서울용산구이촌동민영아파트 H 동 401 호	794-1391
허수경	〃	서울서대문구북가좌동 378-5	372-3436
오혜경	〃	서울도봉구우이동 154-11	993-1676
연영님	〃	경기남양주군구리읍수택 5 리 409-49	63-3443
김종성	〃	서울성북구동선동 2 가 274	722-0985
김미정	〃	서울은평구불광동 245-68	389-3664

****** 수 학 과 3 학 년 주 소 록 ******

이 름	학번	주 소	전화번호
김세종	81	서울마포구서교동 485-6	332-3220
이석균	81	충남아산군탕정면호산 2 구 360	
권석만	81	서울성동구성정동 72-29	466-7687
장춘식	81	서울도봉구번 2 동 103-14 2/1	918-3475
강승희	81	서울동대문구장안 1 동 419-3	244-8916
유시완	81	서울영등포구영등포동 29-47	633-3839
나종원	84	서울강동구잠실동고층아파트 521 동 105 호	414-9737

이수경	84	서울성동구구의동 22-5	444-0073
김용무	〃	서울동대문구장안 3 동장안아파트 19 동 208 호	212-9632
김진관	〃	서울영등포구신길 4 동 244-101 호	845-8718
이옥연	〃	서울성북구안암 1 가 163 번지	95-7301
곽창옥	〃	서울은평구녹번동 141-21	389-4057
박상순	〃	서울영등포구당산동강남아파트 21 동 505 호	633-9901
허 준	〃	부산시사하구괴정 4 동 578-25	205-5363
박일환	〃	서울강동구풍납 2 동 246-11 호	477-1666
김철홍	〃	서울관악구봉천 1 동 964-27 호	886-5847
이원희	〃	경기도부천시심곡 1 동 603 번지 13 통 1 반	63-3027
전운환	〃	서울도봉구수유 5 동 518-140 호	903-3316
임지연	〃	서울성북구상월곡동 7-139 호	915-7532
김영진	〃	서울성동구성수 2 가 16-57 호	464-8964
황진경	〃	경기도과천시주공아파트 810-203	503-2343
김원숙	〃	서울도봉구월계동월계아파트 24 동 403 호	973-0601
김미경	〃	서울종로구홍지동 63-23 호	735-2978
남연주	〃	서울서대문구북아현 1 동 96 번지	362-0966
오경희	〃	서울도봉구수유 1 동 461-86 호 33 통 3 반	989-7891
곽현실	〃	경기도의정부시의정부 2 동 241(1/3)	2-7106
이 형	〃		
송하영	〃	서울도봉구쌍문 2 동 137-203 호	992-6074
김태경	〃	서울은평구갈현동 227-37 호	387-8277
박동준	〃	서울도봉구수유 4 동 557-3 호 3 통 7 반	993-8376
강준규	〃	서울강남구방배동 782-8 호 26 통 6 반	599-8334
이효열	〃	서울강동구신천동장미아파트 28 동 308 호	424-2722
이선규	〃	서울도봉구창 1 동 750-8 호	992-1523
윤숙희	〃	경기도광주군동부읍덕풍 7 리 548-8 호	5-8928
장정환	〃	서울중구신당 2 동 417-11 호	235-1928

태성홍	84	경남울산시남구애암동 92-2	74-4692
백승욱	〃	서울동대문구제기 1 동 1147-6 호	94-8598
이영선	〃	서울성동구화양동 15-33 호	464-9881
이동수	〃	서울중구황학동 45 번지	253-1006
김태현	〃	서울동대문구망우 2 동 512-51 호	434-4179
유기준	83	서울동작구흑석 1 동 204-9	813-1262
이성복	〃	서울구로구오류 2 동 98	
박노욱	〃	서울은평구응암동 631-23	304-4974
김난희	〃	서울동대문구쌍문 1 동 414-26	994-2596

****** 수학과 2 학년주소록 ******

이 름	학번	주 소	전화번호
김정섭	82	경기수원시세류 1 동 219-5(17/4)	33-9573
김정섭	82	수원시세류 1 동 219-5(17/4)	33-9573
박흥식	82	부천시원미동 60-1 호유림연립 B 동 204 호	654-3287
유학래	81	서울마포구아현 2 동 737-4(27/4)	
최윤서	85	서울도봉구미아 8 동 362(5/2)	989-8401
전해돈	〃	서울구로구구로 5 동 571-18(1/1)	854-4170
최항식	〃	서울영등포구대림 3 동 790-9(22/1)	842-7008
강주성	〃	전남나주군봉황면오림리 404	32-8496
		서울동대문구제기 2 동 67-355 호 13/4	95-6582
이성종	〃	제주도서귀포시서귀동 587-21(3/5)	62-3438
		서울시동대문구제기 2 동 67-104(14/8)	94-9858
정상태	〃	부산시진구양정 2 동 508-24	82-1308
		서울성북구동선동 2 가 310(4/4)	95-0567
한상복	〃	경북울산시서부동 181-54	

임채영	85	서울시동대문구묵 1 동 155-10(11/5)	973-9684
류현수	〃	서울도봉구수유 5 동 404-21	902-2570
이창희	〃	서울관악구신림 3 동 713-16	862-5161
한길환	〃	충북청원군북일면내수리 34	
		서울성동구구의동 242-99	444-9103
김연섭	〃	전북정읍군이평면산매리 335	
		서울동대문구용두 2 동 199-25(5/2)	922-3970
정인복	〃	서울중구신당 5 동 84-1(4/7)	233-9925
이미선	〃	경기도용인군용인읍김량장리 51-15	2-3830
오명준	〃	서울동대문구망우 3 동 420-16(6/2)	493-1809
유영미	〃	경기도수원시지동 179-13	6-5976
윤정현	〃	서울동작구사당 4 동 213-13(8/4)	584-2918
최종화	〃	경기도시흥군당리 8 지구 9 블럭 2-10	51-3333
이도성	〃	서울도봉구수유 5 동 391-208	902-3673
류경실	〃	서울관악구신림 2 동 103-57	878-9722
정형준	〃	서울구로구구로 2 동 730-23	854-2596
최수영	〃	서울도봉구미아 3 동 224-58	989-7467
정영준	〃	충남논산군논산읍부창 2 동 45	2-4326
		서울관악구신림 5 동 1416-8(6/2)	
이정선	〃	전남광주시동구산수 3 동 532-60	55-4691
		서울성북구안암 5 가 16-4	
이형용	〃	서울관악구신림 2 동 94-255	882-9993
양희선	〃	서울동대문구전농 1 동 402-14	246-1003
오효원	〃	서울용산구한남동 686-30	794-6954
윤 미	〃	서울강동구신천동미성 APT 7 동 202	423-5858
하재학	〃	전북전주시서서학동 276-1(5/2)	6-4261
		서울도봉구번 2 동 78-13(1/1)	915-8003
남봉기	〃	서울동대문구답 2 동 39-45	246-2023
성은숙	〃	서울구로구개봉동 351-16	612-3954
박태완	〃	서울동대문구제기 1 동 1147-21	95-0587

노주석	85	서울관악구신림 3 동 631-2	855-7470
이창우	〃	서울도봉구미아 1 동 791-2635	980-8756
안용배	〃	충북충주시지현동 289-11	
		서울성북구안암 5 가 86-10	923-5264
임진섭	〃	서울도봉구미아 8 동 1261-393	981-1359
전광준	〃	서울은평구불광 2 동 345-38(9/1)	386-9686
류희수	〃	대전시중구태평동삼부 APT 34 동 134 호	522-2235
		서울도봉구월계동시영월계 APT 23 동 303 호	
조승한	〃	서울서대문구홍제 1 동 312-240	739-9524
조윤호	〃	서울구로구고척동 92 장미 APT 1 동 304	614-2729
송광종	〃	서울구로구구로 2 동 413-74(18/6)	853-3981

****** 수학과 1 학년주소록 ******

이 름	학번	주 소	전화번호
정재영	84	서울강동구명일동고층 APT 913 동 506 호	482-9205
김창헌	86	서울성북구성북 1 동 178-56 성북하이츠빌라 101호	745-1665
김강현	〃	서울서대문구홍은 1 동 148-36(2/1)	389-9669
김근호	〃	서울도봉구수유 3 동 190-19	902-2178
김민근	〃	경북울진군울진읍죽변 3 리 121-1	885-9045
김병권	〃	서울성동구구의동 251-7(6/5)	444-0920
김태희	〃	서울서대문구북가좌 1 동 136-275	417-0382
김형석	〃	경기도성남시태평 1 동 7243-1	2-7900
김황일	〃	서울성북구성북동 1 가 109	742-0353
노현숙	〃	서울서대문구연희 1 동 219-2 연흥맨션라동 102 호	333-1417
박교흥	〃	서울강남구논현동 184-18	
박기범	〃	서울성북구안암동5 가산 1-29 고대기숙사 1 동 102호	94-9350
		대전시동구가양동산 18-7(14/3)	73-8410

박상규	86	서울동대문구이문 1 동 83-105(15/3)	966-8558
		부산시남구남천 1 동 35-36(19/5)	623-6895
박영호	〃	경기도성남시단대 4 동 5419	624-2448
박춘재	〃	경기도평택시비전 2 동 549	2-7633
염도남	〃	서울은평구갈현동 435-33	387-3425
오창국	〃	서울강남구방배 2 동 943-29	584-1359
우석호	〃	경북문경군호계면벽암 2 리 512 번지	95-0348
유인희	〃	서울서대문구남가좌 2 동 370-24	302-6237
윤태영	〃	서울도봉구창 3 동 501-3(16/4)	992-7194
이건호	〃	서울동작구사당 4 동 181-154	583-8838
이동석	〃	경기도과천시주공APT 228 동 304 호	503-5829
이명우		서울강남구신반포 1 차APT 17 동 401 호	
이병철	〃	부산서구초창동 3 가 83 번지(9/3)	533-8831
	〃	서울성북구안암 5 가 103-230	923-2141
이연권	〃	경남진주시상봉서동 864-1	2-8379
		서울월계동삼창APT C동 807	913-8187
이진구	〃	서울강서구화곡 1 동 366-16	602-5436
이창용	〃	경기도용인군기흥면영덕리 584	33-8084
이충수	〃	서울은평구갈현동 449-8	354-6677
이효원	〃	고대 기숙사 2 동 412 호 2 번	922-6205
장성욱	〃	인천시남구구월 2 동 342-1	422-8696
전상화	〃	서울성북구안암동 5 가산 1-29 고대기숙사 1 동 112 호	94-9350
전윤호	〃	서울서대문구홍제동 224-17	735-8992
정경영	〃	서울관악구봉천 9 동 635-29	878-2227
정효정	〃	서울도봉구수유 1 동 57-159	981-3606
조성관	〃	강원도철원군서면와수리	6-2069
		서울성동구구의동 232-22	445-5087
조영경	〃	서울종로구평창동 571-11	55-2383
천진영		서울강남구반포 2 동 612-138	532-4155
최애영	〃	서울도봉구수유 3 동 23-49	904-1417

최영선	86	서울종로구종로4가 31번지	745-3459
최진희	〃	서울도봉구수유2동 525-5	907-1313
허영일	〃	서울마포구서교동 347-4	922-2603
황은주	〃	서울강서구화곡5동 983-5(4/2)	603-1821
황인선	〃	경기도강화군교동면양갑리 937-2	427-8249
황창식	〃	경북문경군산북면가곡리 106	52-7568
황혜성	〃	서울은평구대조동 208-15	385-3003

편 집 후 기

우리에게 죽음을 헌하지 말라.
짜증에 갇혀버린 무더위
칙칙함에 삼켜진 장마.
여름의 시간을 해산의 고통으로 여기며
우리의 생을 쏟아 부었다.
이제 첫아이를 안은 어머니의 기쁨 뿐이다.

— 상 —

마주서면 인연이요, 돌아서면 절연이라.
만남이란 이렇듯 단순하지만 인연은 너무도 깊다.
단순함의 그늘속에서 깊음을 갖는 數와 人을 청아한 선율에 사르고 싶다.

— 鎭 —

호랑이는 죽어서 가죽을 남기고
인간은 죽어서 글을 날긴다던가.
아뭏은, 나름대로 열심히 뛴 결과
편집후기를 쓰는 지금은 약간의 자부심과 보람을 느낀다. 그리고, 이 작은 문집이 간직하는 좋은 보물이 되길 바란다.

— 秀 —

편집(보다 정확히 말하면 교정)이란 걸 처음 해보았다.

미숙한 결과로 원고가 온통 교정부호 투성이가되어 일환 선배의 눈총도 받고, 이사람, 저사람 함께 일하는 재미도 보고……

한게 얼마 없지만 우리 학회지를 만들었다는 생각에 괜히 뿌듯하다.

"나는 부족하되 내가 간구하지 않은 기도까지 다 응답 되었으며 이제 나는 많은 사람들 가운데 서서 가장 충족한 축복을 입었노라."

— 賢 —

풍성한 가을의 결실을 위해 태양이 한 여름의 뜨거운 햇살을 보내듯 우리도 이 한 권의 책을 선물하기 위해 여기에 우리의 정성과 사랑을 모았다.

좀 더 성숙한 인간이 되기 위한 긴 고뇌의 시간을 마련하고, 그러면서도 주어진 현실에 충실할 수 있는 고대의 수학인이 되길 바라며 여기 그만 펜을 놓을까 한다.

— 貞 —

일을 맡아 한다는 것은 쉬운 일이 아니다.

더우기 하고 싶지 않은 일은.

하지만 맡은 일을 열심히 한다는 것은 중요하다.

더우기 책임진 일은.
일을 어려워하기 보다는

자기의 일이 무엇인가를 아는 것이 현명하다.

결국 자기가 해야 하는 일이기 때문에.
편집부의 발전을 바라며…….

— 煥 —

제 7 호　수학과 학회지

- 발　행 : 고대 수학과 편집부
- 발행일 : 1986 년 9 월　일
- 발행인 : 허　준
- 인쇄인 : 추 성 호